НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

РЕПЕТИТОР ПО ФИЗИКЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Новосибирск 2015

УДК 531 (075)
ББК 22.3, Я 73
Р 411

Кафедра теоретической и прикладной физики

Составители: канд. техн. наук, доц. *В.Я. Чечуев*, канд. техн. наук, доц. *С.В. Викулов*, канд. пед. наук, доц. *Э.Б. Селиванова*, доц. *И.М. Дзю*, ст. преп. *А.П. Минаев*

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *М.П. Синюков* (НГАВТ), канд. физ.-мат. наук, доц. *В.И. Сигимов* (НГАВТ)

Репетитор по физике. Физические основы механики: учеб. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: В.Я. Чечуев, С.В. Викулов, Э.Б. Селиванова, И.М. Дзю, А.П. Минаев. – Новосибирск: ИЦ НГАУ «Золотой колос», 2015. – 83 с.

Учебное пособие содержит изучаемый в курсе общей физики материал по физическим основам механики.

Предназначено для студентов всех форм обучения по всем направлениям подготовки, реализуемым в НГАУ.

Утверждено и рекомендовано к изданию методическим советом Инженерного института (протокол № 36 от 24 февраля 2015 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие может быть использовано студентами при самостоятельном изучении курса, при решении задач на практических занятиях, при выполнении домашних заданий и типовых расчётов совместно с «Заданием к самостоятельной работе по курсу «Физика» (ч. I. Механика).

Описана структура процесса решения задач и кратко рассмотрена роль эвристических методов в процессе его поиска.

Для лучшей ориентации в учебном материале в каждом разделе приведены таблицы основных физических величин и соотношений между ними, рассмотрена классификация задач и даны общие подходы к их решению.

Такая последовательность в изложении материала позволяет в процессе его изучения формировать умение решать задачи.

СТРУКТУРА ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В повседневной деятельности инженер занят в основном решением различных производственных задач. Поэтому умение их решать является необходимым профессиональным качеством. Это качество следует вырабатывать в процессе учёбы. И чем раньше студенты начнут формировать у себя такое важное умение, тем лучше они будут подготовлены к самостоятельной профессиональной деятельности. Разумнее всего начинать эту работу сразу на первом курсе, в частности при изучении курса физики.

Сравнительный анализ учебных и производственных задач показывает, что они имеют общую структуру процесса решения, т.е. при решении задач обоих типов необходимо преодолевать одни и те же четыре принципиально важных этапа:

– изучение (анализ) содержания задачи, краткая запись условий и требований;

– поиск способа решения и составление его плана;

– осуществление решения, проверка правильности и оформление решения;

– анализ решения и отбор информации для дальнейшей работы.

Первый этап начинается с ознакомления с содержанием задачи и его детального анализа. Как показывает опыт, на его продуктивность существенно влияют краткая запись условий и требований, а также схематическое представление (рисунок, чертёж, схема, график) процесса, описанного в задаче. Это объясняется тем, что они помогают удержать в памяти исходные данные и требования, способствуют уяснению прямо заданных в тексте зависимостей и помогают воссоздать общую картину исследуемого процесса. Как же нужно его проводить? Опыт показывает, что исходным звеном любого познавательного процесса, частным случаем которого служит и анализ содержания учебной задачи, является ВОПРОС. Именно он вызывает первое пробуждение мысли, именно он толкает мысль на устранение возникшей неясности. Вопрос предшествует и способствует образованию новых суждений, наводит на ассоциацию, помогает становлению нового знания.

Чтобы помочь студентам научиться анализировать содержание задачи, приведём ряд вопросов, которые могут быть использованы в этом процессе.

– О каком объекте (материальная точка, твёрдое тело, идеальный газ, электрическое поле и т.д.) идёт речь в задаче?

– В каких условиях протекает явление (процесс)?

– Скалярной или векторной величиной является искомая величина?

– Содержит ли условие задачи величины, заданные в неявной форме?

Конечно, определённый перечень не содержит всех вопросов, необходимых для анализа содержания задачи. Вы можете и должны расширить его. Помните: умение ставить вопросы очень важно, ибо «хорошо поставить вопрос – значит наполовину решить его» (Д.И. Менделеев). Поэтому старайтесь как можно раньше научиться ставить и формулировать вопросы. Такое умение, нужное при анализе задачи, в ещё большей степени понадобится на втором этапе – при поиске способов решения. Но к нему следует приступать (и это должно войти в привычку) лишь после завершения первого этапа, т.е. тогда, когда с помощью краткой записи и чертежа удаётся полностью восстановить первоначальный текст задачи.

Второй этап является самым интересным, самым важным и таинственным, ибо решение приходит неосознанно. Вот как описывает его появление Л. Пойа: «Я читаю условие задачи, смотрю на него, ещё раз читаю до тех пор, пока в голову не приходит решение». Но как возникает оно? Исчерпывающего ответа на этот вопрос, естественно, нет.

Но тогда как же вести поиск решения? Пожалуй, единственная возможность состоит в использовании приёмов, базирующихся на применении мыслительных операций, ранее доказавших свою полезность в процессе поиска решения других задач.

Разработкой таких приёмов занимается наука, называемая эвристикой. Соответственно сами приёмы называются эвристическими (прилагательное «эвристический» означает служащий для открытия). Их суть сводится к тому, что полезные при решении мыслительные операции подсказываются определёнными стереотипными советами и вопросами вида:

– Все ли данные вы использовали?

– Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?

– Вспомните, не решалась ли вами ранее аналогичная задача.

– Нельзя ли задачу сформулировать иначе?

Как видите, это обычные вопросы, потому не стоит думать, что они обладают магической силой и в состоянии помочь всегда.

Но если эти вопросы не помогли при решении какой-либо задачи, то постарайтесь придумать для её решения более подходящие. Сделайте это обязательно, ибо только ставя вопросы можно решать задачу.

Для иллюстрации рассмотрим, как могут влиять на процесс решения последние из приведённых выше вопросов.

Главное – поиск идеи, которая может лечь в основу плана решения. Эта идея может появляться постепенно или может возникнуть вдруг, в один миг, после, казалось бы, безуспешных попыток и продолжительных сомнений.

Конечно, трудно рассчитывать на удачную идею, имея слабые познания, и невозможно найти такую идею, не имея никаких познаний. Но и при наличии знаний хорошая идея появляется далеко не всегда. Чтобы она могла возникнуть, необходимо обеспечить протекание определённых мыслительных процессов. К примеру, процесса мобилизации и организации знаний, заключающегося в отборе из имеющихся у вас знаний всех сведений, относящихся к решаемой задаче, и в комбинации этих сведений в систему, приспособленную к её решению. Чаще всего этот процесс осуществляется неосознанно, но он может быть вызван и сознательно, в частности вопросом: «Не решалась ли ранее аналогичная задача?» Механизм протекания процесса мобилизации и организации знаний в этом случае представляется следующим. Пытаясь вспомнить аналогичную задачу, вы мысленно фиксируете основные моменты в решаемой. Но то, что занимает ваши мысли в данный момент, согласно теории ассоциаций, имеет тенденцию вызвать в памяти всё, что связано с ним раньше. В результате из памяти извлекается информация, относящаяся к основным моментам задачи, которая, комбинируясь в систему, может породить идею плана решения.

Если этого не случилось, полезно задать вопрос: «Нельзя ли задачу сформулировать иначе?» Его постановка заставляет видоизменить условие. В результате ваше внимание может быть обращено на моменты, не зафиксированные при чтении первоначального текста, что создаёт вам дополнительные возможности ассоциативно воскресить в памяти всё, что имеет отношение к данной задаче.

Но не только вопросами можно вызвать течение полезных мыслительных процессов. Дело в том, что сами мыслительные процессы могут протекать не только в вербальной (словесной, формульной), но и в образной форме, т.е. в виде картин реального мира, графиков, диаграмм и т.д.

Наличие образного мышления открывает качественно новые возможности поиска плана решения путём вызова упорядочения информации в образной форме. Дело в том, что образы обычно несут значительно больший объём информации, чем эквивалентная им по числу знаков вербально оформленная мысль, а потому их упорядочение может приводить к практически одномоментному решению. Простейшим, но не единственным способом вызова образной информации может служить изображение процесса или явления, описанного в задаче, в виде рисунка, графика, схемы и т.д. Именно поэтому в дальнейшем при решении задач мы рекомендуем самое пристальное внимание уделить представлению содержащейся в них информации в образной форме.

Подобно описанным «работают» и другие эвристические приёмы. Подробнее о них можно прочесть в книгах Л. Пойа «Как решать задачу», «Математическое открытие», «Математика и правдоподобные рассуждения».

С появлением плана решения заканчивается второй этап и начинается третий – осуществление, правильное и грамотное оформление решения задачи. Его следует проводить в строгой логической последовательности, тщательно обосновывая правильность каждого своего «шага». И делать это нужно осознанно, т.е. нужно уметь показать, почему именно это, а никакое другое правило должно быть использовано в данном конкретном случае.

В самом его начале, если в задаче приведена реальная ситуация, необходимо осуществить переход к описывающей её математической модели. Это очень важный этап, ибо осуществление его позволяет будующим инженерам приобрести ценнейший опыт для перевода реальных задач на язык математических понятий.

Далее следует записать формулы (систему уравнений), связывающие искомую величину с заданными, и решать задачу в общем виде, т.е. провести все преобразования формул, обосновывая последовательность действий, и записать выражение искомой величины через известные в буквенной форме. Следующим «шагом» надо проверить размерности, и если они равны в обеих частях равенства, то это первый признак правильности полученного соотношения. После этого подставьте в конечную формулу числовые значения входящих в неё величин и вычислите результат. Помните, что число значащих цифр в конечном результате определяется не возможностями калькулятора, а правилами приближённых вычислений. В заключение оцените полученный результат – он должен соответствовать реальности.

Немаловажное значение имеет и оформление решения задачи. Его нужно начинать с краткой записи условий и требований задачи. При этом для обозначения физических величин следует применять только общепринятые буквенные обозначения, а их числовые значения сопровождать соответствующими единицами. Последовательность записи данных может быть различной. Мы рекомендуем следующую:

1) значения величин, указанных в тексте задачи;

2) значения величин, взятых из таблиц и справочников;

3) вопрос или требование задачи.

После этого сделайте рисунок, поясняющий содержание задачи. Можно считать, что краткая запись выполнена хорошо, если по ней легко восстановить всю задачную ситуацию в целом. Далее запишите ход решения в той последовательности, как оно и осуществлялось.

Итак, задача решена. Тем не менее, не торопитесь считать свою работу над решением задачи завершённой, и обязательно выполните заключительный этап – анализ её решения.

Естественно, может возникнуть вопрос: зачем нужно анализировать решение задачи, если она уже решена, и при этом правильно?

Вы должны отчётливо понимать, что целью решения учебных задач является не столько конкретный результат, сколько овладение знаниями и умениями, необходимыми для решения реальных задач. Такими знаниями и умениями можно овладеть только в том случае, если регулярно решать задачи и при их решении на каждом из трёх этапов осознанно следовать приведённым советам, а решив задачу, – детально анализировать её решение.

Как лучше это делать? Прежде всего, ещё раз изучите найденное решение. Подумайте, нельзя ли задачу решить другим методом. Опишите в тетради причины затруднений в решении именно данной задачи, перечислите особенности решения этого нового для вас типа задач и подумайте, при решении каких задач их можно было бы применить.

Итак, для нахождения плана решения надо воспользоваться эвристическими приёмами. Естественно, возникает вопрос: пользовались ли вы ими раньше? Конечно. Только делали это «стихийно» (не осознанно), сами того не подозревая. Если же познакомиться с эвристическими приёмами и применять их к решению задач сознательно и целенаправленно, то эффект будет куда более значительным.

Именно на таком их использовании базируются различные способы решения задач. Ниже мы рассмотрим только алгоритмический способ. В нём решение осуществляется по определённому алгоритму (программе). Его высокая эффективность объясняется тем, что он разрабатывается на основе обобщения опыта успешного применения эвристических приёмов к решению задач данных типов. Сама последовательность действий подобрана такой, что алгоритм автоматически вызывает нужные последовательности мыслительных процессов, приводящие, в конечном счёте, к решению. Из сказанного следует, что для успешности необходимо, особенно на первых порах, жёстко соблюдать предписания алгоритма.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные соотношения

Если размерами физического объекта в условиях данной задачи можно пренебречь, то он может рассматриваться как *материальная точка*, т.е. как объект, имеющий массу, но не имеющий протяжённости.

В кинематике материальной точки изучаются способы описания её движений, независимо от причин, обусловливающих эти движения.

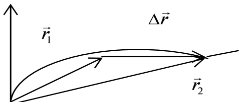
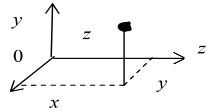
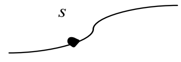
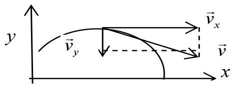
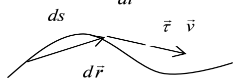
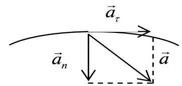
Описать движение – значит указать положение материальной точки в любой момент времени. Естественно, для того чтобы решить эту задачу, нужно сначала выбрать систему отсчёта. В выбранной системе отсчёта положение материальной точки может быть задано тремя способами: векторным, координатным и «естественным». В соответствии со способами задания положения возможны три способа описания движения материальной точки: векторный, когда задана зависимость радиуса-вектора от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$, координатный, когда заданы зависимости $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, и «естественный», когда задана зависимость пути от времени $s = s(t)$ и известно уравнение траектории.

В каждом способе движение характеризуется с помощью кинематических параметров. К ним относятся радиус-вектор $\vec{r}$, вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, координаты x, y, z, путь s, средняя $\langle\vec{v}\rangle$ и мгновенная $\vec{v}$ скорости, среднее $\langle\vec{a}\rangle$ и мгновенное $\vec{a}$ ускорения.

Здесь мы не будем рассматривать, как вводятся эти параметры (об этом следует прочесть в конспекте или учебнике) и ограничимся лишь тем, что приведём соотношения между ними при трёх способах описания движения (табл. 1.1).

В табл. 1 $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ – соответственно нормальное и тангенциальное ускорения; $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Таблица 1.1

Кинематические характеристики	Способы описания движения		
	векторный	координатный	естественный
Радиус-вектор, вектор перемещения, координаты, путь $\vec r$, $\Delta\vec r$, x, y, z, s	$\vec r = \vec r\,(t)$  $\vec r\,(t) = x(t)\,\vec i + y(t)\,\vec j + z(t)\,\vec k$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  $\lvert\vec r\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$s = s(t)$  $\vec r\,(t) = \vec r\left[s(t)\right]$
Средняя скорость	$\langle\vec v\rangle = \dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$	$\begin{cases} \langle v_x\rangle = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \langle v_y\rangle = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ \langle v_z\rangle = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$	$\langle v\rangle = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$
Мгновенная скорость	$\vec v = \dfrac{ds}{dt}$  $\vec v = v_{x\vec i} + v_{y\vec j} + v_{z\vec k}$ $\lvert\vec v\rvert = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$	$v = \dfrac{ds}{dt}$  $\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt} = \dfrac{d\vec r}{ds} = \dfrac{ds}{dt} = \vec\tau\cdot v$
Среднее ускорение	$\langle\vec a\rangle = \dfrac{\Delta\vec v}{\Delta t}$	$\begin{cases} \langle a_x\rangle = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \langle a_y\rangle = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \langle a_z\rangle = \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{cases}$	$\langle a\rangle = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
Мгновенное ускорение	$\vec a = \dfrac{d\vec v}{dt}$ $\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k$ $\lvert\vec a\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$		$a = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ $\vec a = \dfrac{d\vec v}{dt} = \vec\tau\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{d\vec\tau}{dt} = \vec a_\tau + \vec a_n$ $\lvert\vec a\rvert = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ 

В табл. 1.2 приведены соотношения, описывающие равномерное и равнопеременное движения. В них индексы с нулём обозначают начальные значения соответствующих величин: φ – угол поворота; $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – угловая скорость; $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – угловое ускорение; R – радиус окружности.

Просматривая табл. 2, обратите внимание на аналогию уравнений прямолинейного и вращательного движений. Последние могут быть получены из первых путём одновременной замены s на φ, $\vec{v}$ на $\vec{\omega}$, $\vec{a}$ на $\vec{\varepsilon}$.

Таблица 1.2

Характер движения	Траектория	Отличительная черта движения	Кинематические уравнения
Равномерное	Прямая	$\vec{v} = \text{const}$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ $s = s_0 + v_0 t$ $\vec{v} = \text{const}$ $\vec{a} = 0$
	Окружность	$\lvert\vec{v}\rvert = \text{const}$ $\vec{\omega} = \text{const}$ $\lvert\vec{r}\rvert = R = \text{const}$	$\vec{a}_\tau = 0$ $\lvert\vec{a}\rvert = a_n = \frac{v^2}{R}$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\vec{\omega} = \text{const}$ $\varepsilon = 0$
Равно-переменное	Прямая	$\vec{a} = \text{const}$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $\vec{v} = v_0 t + \vec{a}t$ $\vec{a} = \text{const}$
	Окружность	$\vec{\varepsilon} = \text{const}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$ $\vec{\varepsilon} = \text{const}$

Связь между линейными и угловыми величинами определяется уравнениями:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right], \;\; \vec{a} = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \vec{v}\right], \qquad (1.1)$$

которые для случая движения по окружности преобразуются к виду

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (1.2)$$

Вот, собственно, и все соотношения, необходимые при решении задач, соответствующих учебной программе. Для наглядности связи между различными кинематическими параметрами изобразим в виде блок-схемы (рис. 1.1).

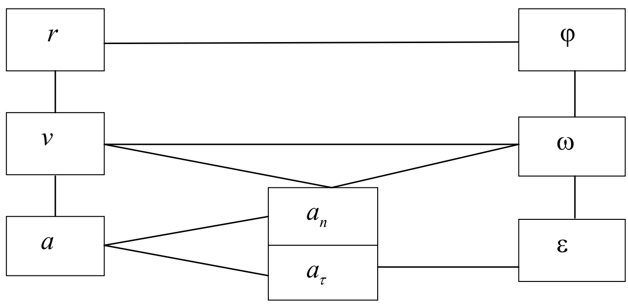


Рис. 1.1. Структурно-логическая схема «Кинематики»

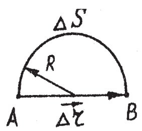
1.2. Задачи для отработки кинематических понятий

Хорошо ли вы понимаете, какой смысл вкладывается в то или иное понятие или соотношение? Ниже мы предлагаем ряд качественных задач, с помощью которых вы можете проверить и углубить свои знания. Часть из них имеют подробные решения, другие предназначены для самостоятельного решения. Попытайтесь сначала все задачи решить самостоятельно. В случае неудачи при решении восьми первых задач не спешите прочесть всё решение. Иногда достаточно прочесть несколько строчек объяснения, т. е. получить небольшую подсказку, чтобы затем самостоятельно довести решение до конца.

Задача 1

Определить угол и перемещение материальной точки, движущейся по заданной траектории из точки A в точку B.

Решение



Вектор перемещения направлен из начальной точки в конечную и, следовательно, $|\Delta\vec{r}| = 2R$. Путь определяется отрезком траектории между точками A и B:

$$\Delta s = \frac{1}{2}(2\pi R) = \pi R .$$

Задача 2

Определить направление движения материальной точки через время $t_1 = 0{,}5\,\text{с}$ и $t_2 = 3\,\text{с}$ после начала движения, если её движение вдоль оси OX описывается уравнением $x = 10t - 2t^2$.

Решение

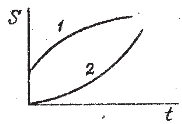
Направление движения в конкретный момент времени определяется направлением вектора мгновенной скорости $\vec{v}$ и направлением бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$. Если проекция вектора скорости на выбранное направление положительная, то точка движется в этом направлении, если отрицательная – в противоположном.

Используем координатный способ описания движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \;\; v_x(t) = 10 - 4t .$$

Подставляем в полученную формулу значения t_1 и t_2 и находим $v_x(t_1) = 8\,\text{м/с}$; $v_x(t_2) = -2\,\text{м/с}$. Следовательно, в момент времени t_1 точка движется в положительном направлении оси OX, а в момент времени t_2 – в противоположном.

Задача 3



Зависимость пройденного пути от времени для двух движущихся прямолинейно точек представлена кривыми 1 и 2. Какая кривая соответствует движению с возрастающей, а какая с убывающей скоростью?

Решение

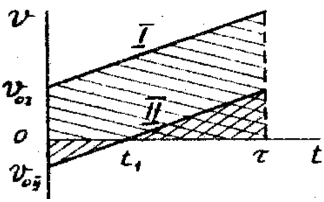
Ускорение при прямолинейном движении $a = \dfrac{d^2s}{dt^2}$. Для кривой, направленной выпуклостью вниз, вторая производная положительная, а для кривой, направленной выпуклостью вверх, – отрицательная (см. приложение).

Поэтому кривая 1 соответствует замедленному движению, а кривая 2 – ускоренному.

Задача 4

На рисунке изображены графики двух прямолинейных движений I и II. Сравнить в I и II: а) ускорения; б) пути, пройденные за время τ .

Решение



В этой задаче необходимо уточнить геометрическую интерпретацию пути и ускорения на графике скорости. Вспомним связь между скоростью и искомыми величинами.

1. Для прямолинейного движения ускорение

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Учитывая геометрический смысл производной как тангенса угла наклона касательной, получим $a_I = a_{II}$.

2. По определению скорости в естественном способе описания движения $v = \dfrac{ds}{dt}$. Движения I и II – равноускоренные и отличаются только начальными скоростями:

$$v_I(t) = v_{OI} + at, \quad v_{II}(t) = v_{OII} + at.$$

Отсюда следует, что $ds = vdt$. Интегрируя от $t = 0$ до $t = \tau$, получаем

$$s = \int_0^\tau vdt.$$

Геометрический смысл определённого интеграла – площадь между кривой $v(t)$ и осью абсцисс от 0 до τ. Следовательно:

$$s_I = \int_0^\tau v_I dt,$$

$$s_{II} = \int_0^{t_1} v_{II} dt + \int_{t_1}^\tau v_{II} dt.$$

Итак: $s_I > s_{II}$.

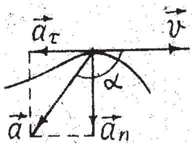
Задача 5

Материальная точка, двигаясь по окружности радиусом R, совершила один оборот за 2 с. Чему равна средняя скорость пути и средняя скорость перемещения этой точки?

Решение

За один оборот точка прошла путь $\Delta s = 2\pi R$ со средней скоростью пути $\langle|\vec{v}|\rangle = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \pi R$. Вектор перемещения при этом равен нулю, так как тело вернулось в исходную точку, следовательно, средняя скорость перемещения равна нулю: $\langle \vec{v} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 0.$

Задача 6



В некоторый момент времени угол между векторами скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ равен $\alpha > 90^\circ$. Каков характер движения в этот момент времени?

Решение

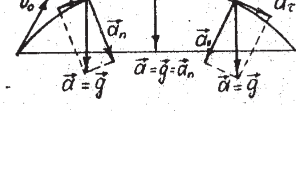
Используем естественный способ описания движения. Ускорение $\vec{a}$ можно представить в виде суммы двух составляющих (см. табл. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории, т.е. перпендикулярно $\vec{v}$, и характеризует изменение скорости по направлению, а вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории и характеризует изменение скорости по величине. Поэтому при наличии $\vec{a}_n \neq 0$ движение происходит по криволинейной траектории и, так как $\dfrac{dv}{dt} = a_\tau < 0$, то оно замедленное.

Задача 7

Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. В точках *A*, *B* и *C* траектории движения покажите вектор $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$ и вектор полного $\vec{a}$ ускорения. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, как в процессе подъёма меняются эти ускорения (увеличиваются или уменьшаются).



Решение

Полное ускорение, с которым движется тело, – это ускорение свободного падения (в отсутствие сопротивления воздуха) и во всех точках траектории оно направлено вниз. Разложив вектор $\vec{a}$ на касательное и перпендикулярное к траектории направления, получим $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, которые в точках A, B, C изображены на рисунке. По мере подъёма скорость $v = \dfrac{ds}{dt}$ уменьшается, так как уменьшается крутизна траектории, $\vec{a}_\tau$ убывает, а $\vec{a}_n$ растёт. В верхней точке траектории

$$\vec{a}_n = \vec{a} = \vec{g}\,.$$

Задача 8

Точка движется по расширяющейся спирали так, что её нормальное ускорение a_n остаётся постоянным. Как изменяются при этом линейная и угловая скорости?

Решение

Нормальное ускорение выражается формулой:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R\,.$$

Отсюда $v = \sqrt{a_n R}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{a_n}{R}}$. Радиус кривизны расширяющейся спирали монотонно возрастает. Из условия постоянства a_n следует, что при движении из центра спирали линейная скорость растёт пропорционально $\sqrt{R}$, а угловая убывает обратно пропорционально $\sqrt{R}$.

1.3. Классификация задач

По характеру связей между кинематическими параметрами задачи кинематики материальной точки можно разделить на шесть типов.

1. Задачи, в которых по известному закону движения требуется определить зависимости скоростей и ускорений от времени. Математически эти задачи решаются дифференцированием соответствующих функций. Последовательность операций, когда закон движения задан в форме $\vec{r}(t)$, можно представить в виде:

$$\vec{r}(t) \to \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \to \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Аналогичные соотношения имеют место для $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$. Связь между другими характеристиками может быть прослежена с помощью рис. 1, а конкретный вид формул найден из табл. 1.1 и соотношения (1.1).

2. Задачи, в которых требуется решить обратную по отношению к предыдущим характеристикам задачу, т. е. по заданным зависимостям скорости и ускорения от времени и начальным условиям найти закон движения. Математически они решаются интегрированием. Последовательность операций, когда закон движения хотят найти в форме $\vec{r}(t)$, может быть представлена в виде:

$$\vec{a}(t)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int\limits_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) = \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int\limits_0^t \vec{v}(t)\,dt.$$

Аналогичные соотношения имеют место между $\vec{\varepsilon}(t), \vec{\omega}(t)$ и $\varphi(t)$. Связь между угловыми и линейными параметрами может быть прослежена по рис. 1.1, а вид формул найден из соотношения (1.1).

3. Задачи, в которых по известной зависимости двух или нескольких величин, указанных на рис. 1.1, от времени (например, $x(t), v(t), a(t)$) требуется установить связь между этими величинами, т.е. $v(x), a(v)$ и т.д. Такие задачи решаются исключением времени из соответствующих соотношений. Частным случаем задач такого типа являются задачи на нахождение траектории.

4. Задачи, в которых даётся связь между кинематическими характеристиками, например, $v(x), a(x), \varepsilon(\varphi)$ и т.д., а требуется установить зависимость этих характеристик от времени, т.е. эти задачи являются обратными по отношению к задачам предыдущего типа.

Они решаются путём решения дифференциального уравнения, получающегося в результате сопоставления соответствующих зависимостей (например, $v(x)$ и $v = dx/dt$).

5. Задачи, в которых исследуется относительное движение двух или несколько материальных точек. Они решаются с помощью преобразований Галилея: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$, $t = t'$ и вытекающей из них теоремы о сложении скоростей в классической механике: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$.

6. Задачи на исследование сложного движения материальной точки. Они решаются путём применения принципа независимости (суперпозиции) движений.

Общим методом решения задач кинематики материальной точки является *алгоритмический*, в котором поиск решения осуществляется путём выполнения определённой последовательности операций. Часть из них, касающуюся алгоритмов преобразования кинематических уравнений, мы уже рассмотрели при описании классификации задач.

Теперь приведём перечень этих операций.

1. Установите, можно ли в условиях данной задачи заменить рассматриваемый физический объект (объекты) материальной точкой.

2. Установите характер движения (равномерное прямолинейное, равнопеременное криволинейное и т. д.).

3. Сделайте рисунок. Укажите на нём рассматриваемые состояния, а также известные кинематические характеристики и те, которые требуется найти.

4. Выберите систему отсчёта и способ описания движения: векторный, координатный, «естественный».

5. Установите тип решаемой задачи и, используя вышеприведённые указания к решению задач данного типа, запишите кинематические уравнения для рассматриваемых в условиях задачи состояний.

6. Подсчитайте число полученных уравнений и число неизвестных. Решите полученную систему уравнений относительно неизвестных.

7. Проведите анализ решения задачи.

Ясно, что при решении конкретных задач число указанных операций может быть и меньшим. Действительно, в условии задачи характеристики, определяемые в 1–4-й операциях, могут быть просто заданными, что, естественно, исключает их выполнение.

Применение рассмотренного метода к решению конкретных задач демонстрируется нами в п. 1.4. Примеры решения задач, где все задачи решены с его помощью. Просматривая решения, обратите внимание на то, что не все операции полного алгоритма в силу указанных обстоятельств нашли в них своё отражение.

1.4. Примеры решения задач

Задача 9

Радиус-вектор частицы задаётся выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 10\vec{k}$, где $|\vec{r}|$ и t заданы в единицах системы СИ. Найти путь s, пройденный частицей за первые 5 секунд движения, и модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ за то же время. Объяснить полученные результаты.

Дано:

$$t = 5\,\text{с}$$
$$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 10\vec{k}$$
$$s - ?$$
$$|\Delta\vec{r}| - ?$$

Решение

1. Чтобы найти путь, выберем «естественный» способ описания движения, при котором (см. табл. 1) $v = \dfrac{ds}{dt}$, откуда

$$s = \int_0^t v\,dt\,, \tag{1.3}$$

где v – модуль вектора мгновенной скорости.

Отметим, что (1.3) соответствует по нашей классификации решению задачи *второго типа*:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{1.4}$$

Компоненты v_x, v_y, v_z можно определить, если найти вектор мгновенной скорости:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = 6t\vec{i} + 8t\vec{j}\,. \tag{1.5}$$

Данная формула (1.5) соответствует решению задачи *первого типа*. Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$v = t\sqrt{6^2 + 8^2} = 10t\,. \tag{1.6}$$

С учётом (1.6) найдём путь за первые 5 с:

$$s = \int_0^5 10t\,dt = 5t^2\Big|_0^5 = 125\ \text{м},$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2\big|_{t=5} - \vec{r}_1\big|_{t=0.}$$

После подстановки $t = 0$ и $t = 5\,\text{с}$ в заданное в условии уравнение радиуса-вектора получим

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= 10\vec{k} \\ \vec{r}_2 &= 75\vec{i} + 100\vec{j} + 10\vec{k} \end{aligned}\right\}. \tag{1.7}$$

С учётом (1.7)

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta r_x)^2 + (\Delta r_y)^2 + (\Delta r_z)^2} = \sqrt{(75)^2 + (100)^2 + (0)^2} = 125\,\text{м}\,.$$

Анализ результатов. Итак, в ходе решения получено $s = |\Delta\vec{r}|$. Это означает, что частица движется прямолинейно в одном направлении.

Задача 10

Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением $\vec{a}$. Как меняется скорость тела в зависимости от координаты? Перед вами *задача третьего типа.*

Решение

Запишем зависимости координаты и скорости тела от времени (см. табл. 1.2):

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}\,, \tag{1.8}$$

$$v = v_0 + a t\,. \tag{1.9}$$

Исключим время: из (1.9) находим $t = \dfrac{v - v_0}{a}$ и, подставив в (1.8), получим:

$$x = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{(v - v_0)^2}{2a}\,. \tag{1.10}$$

Если начало координат совместить с положением тела в начальный момент, т.е. при $t = 0$, $x_0 = 0$, то (1.10) преобразуется к виду:

$$x = \frac{v^2}{2a}, \quad \text{откуда} \quad v = \sqrt{2ax}.$$

Задача 11

Камень, привязанный на верёвке, вращается замедленно по окружности так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - A\varphi$, где A и ω_0 заданы в системе единиц СИ, причём $\omega_0 > 0,\ A > 0$. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимости от времени угловой скорости $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$.

Решение

1. Взяв производную по времени от левой и правой частей выражения

$$\omega = \omega_0 - A \cdot \varphi , \tag{1.11}$$

получим

$$\frac{d\omega}{dt} = -A\frac{d\varphi}{dt} . \tag{1.12}$$

По определению

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega . \tag{1.13}$$

Подставив (1.13) в (1.12), будем иметь

$$\frac{d\omega}{dt} = -A\omega . \tag{1.14}$$

Разделим в (1.14) переменные и проинтегрируем в пределах от ω_0 до ω и от 0 до *t*:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^t A dt;\ \ln\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega} = -At;\ \ln\frac{\omega}{\omega_0} = -At ,$$

откуда

$$\omega = \omega_0 \cdot e^{-At} . \tag{1.15}$$

2. Из (1.11) имеем:

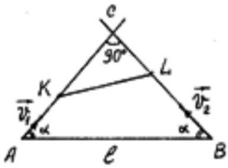
$$\varphi = \frac{\omega_0}{A} - \frac{\omega}{A} . \tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.15), получим

$$\varphi = \frac{\omega_0}{A} - \frac{\omega_0}{A} e^{-At} = \frac{\omega_0}{A}\left(1 - e^{-At}\right).$$

Задача 12 *(задача пятого типа)*

Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми ℓ, одновременно начинают двигаться два корабля со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Векторы скоростей образуют с отрезком AB одинаковые углы $\alpha = 45^\circ$.



Считая движение кораблей равномерным, определить наименьшее расстояние между ними.

Решение

Рассмотрим *два способа решения* задачи, отличающихся выбором системы отсчёта.

Первый способ.

Рассматриваем движение кораблей в системе отсчёта, связанной с Землёй. Скорости кораблей заданы в этой системе отсчёта. Сначала расстояние между кораблями будет уменьшаться, затем (если они не столкнутся) – увеличиваться. Чтобы найти наименьшее расстояние $s_{\min}$, примем общий метод исследования функции на экстремум (см. приложение). Для этого рассмотрим положение кораблей спустя произвольный промежуток времени t после начала движения и найдём расстояние между ними как функцию времени. Из рисунка следует (так как треугольник прямоугольный):

$$s = \sqrt{(KC)^2 + (CL)^2} = \sqrt{(AC - v_1 t)^2 + (BC - v_2 t)^2}\ .$$

Обозначив $AC = BC = a$, получим

$$s = \sqrt{2a^2 - 2a(v_1 + v_2)t + \left(v_1^2 + v_2^2\right)t^2}\ . \qquad (1.17)$$

Для нахождения $s_{\min}$ продифференцируем $s(t)$ (1.17) по времени и приравняем производную по t к нулю:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-2a(v_1 + v_2) + 2t(v_1^2 + v_2^2)}{2\sqrt{2a^2 - 2a(v_1 + v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}} = 0 .$$

Отсюда найдём время, соответствующее наименьшему расстоянию

$$t_{\min} = \frac{a(v_1 + v_2)}{v_1^2 + v_2^2} . \qquad (1.18)$$

Подставив это значение $t_{\min}$ (1.18) в (1.17), получим ответ:

$$s_{\min} = \frac{a|v_2 - v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{\ell|v_2 - v_1|}{\sqrt{2(v_1^2 + v_2^2)}} , \qquad (1.19)$$

так как

$$a = \frac{\ell}{\sqrt{2}} .$$

Анализ решения

1. Из (1.19) следует, что: а) если $v_1 = v_2$, то $s_{\min} = 0$, т.е. корабли встретятся в точке *C*; б) если $v_1 = 0$ или $v_2 = 0$, то $s_{\min} = a$, т.е. $s = s_{\min}$, когда движущийся корабль окажется в точке *C*.

2. Свяжем инерциальную систему отсчёта не с Землёй, а с первым кораблём. В этой системе отсчёта первый корабль будет неподвижным. Второй корабль относительно этой системы отсчёта движется с относительной скоростью $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, и траектория его является прямой линией *BM*. Минимальное расстояние между кораблями есть длина перпендикуляра *AM*, опущенного из точки *A* на прямую *BM*: $|AM| = \ell \sin\varphi$, где φ – угол между направ-

лением BA и вектором $\vec{v}$. Чтобы найти $\sin\varphi$, спроецируем $\vec{v}$ на ось OY:

$v\sin\varphi = v_2\sin\beta - v_1\sin\alpha$. В нашем случае $\sin\beta = \sin\alpha$.

Так как $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, то

$$\sin\varphi = \frac{\left|(v_2 - v_1)\right|\sin 45^\circ}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Следовательно, окончательно

$$s_{\min} = \left|AM\right| = \frac{\ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|(v_2 - v_1)\right|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{\ell\cdot\left|v_2 - v_1\right|}{\sqrt{2\left(v_1^2 + v_2^2\right)}}$$

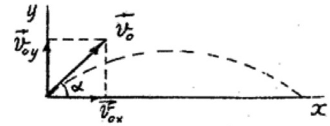
совпадает с выражением (1.19).

Задача 13 *(задача шестого типа)*

Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Определить: 1) уравнение траектории движения тела; 2) время подъёма и общее время движения; 3) максимальную высоту подъёма; 4) дальность полёта; 5) нормальное и тангенциальное ускорения тела и радиус кривизны в момент времени $t = t'$.

Дано:
v_0, α, t'

Найти:
1) $y = f(x)$; 3) $y_{\max}$; 5) a_n, a_τ;
2) t; 4) $x_{\max}$; 6) R.



Решение

Полагая, что радиус кривизны много больше размеров тела, примем тело за материальную точку. Так как при движении тела его ускорение направлено вертикально вниз, то все точки траектории должны лежать в одной плоскости, и значит, для описания движения достаточно двух осей координат.

Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке бросания и свяжем её с Землёй. Ось *OX* направим горизонтально, ось *OY* – вертикально вверх.

Запишем в общем виде кинематические уравнения для движения с постоянным ускорением (см. табл. 2):

$$\left.\begin{aligned} \vec r &= \vec r_0 + \vec v_0 t + \frac{\vec a t^2}{2} \\ \vec v &= \vec v_0 + \vec a t \\ \vec a &= \vec g = \text{const} \end{aligned}\right\}, \tag{1.20}$$

и спроектируем их на оси координат:

$$\begin{cases} x = v_{OX} t = v_0 \cos\alpha \cdot t & (1.21) \\ v_x = v_{OX} = v_0 \cos\alpha & (1.22) \\ a_x = 0 & (1.23) \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{g t^2}{2} & (1.24) \\ v_y = v_0 \sin\alpha - g t & (1.25) \\ a_y = -g & (1.26) \end{cases}$$

Из (1.21) – (1.26) видно, что исследуемое движение может быть представлено как совокупность двух независимых движений: прямолинейного равномерного вдоль оси *OX* и прямолинейного равнопеременного вдоль оси *OY*.

1. Уравнение траектории получим, исключив время из уравнений (1.21) и (1.24). Для этого выразим время из (1.21): $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ и подставим этот результат в (1.24):

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = x \,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2, \tag{1.27}$$

т.е. траектория движения представляет собой параболу.

2. Учитывая, что в верхней точке траектории $v_y = 0$, из (1.25) найдём время подъёма $t_{\text{под.}}$:

$$0 = v_0 \sin\alpha - g t_{\text{под.}}, \text{ откуда } t_{\text{под.}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{1.28}$$

$t_{\text{под.}} = t_{\text{спуска}}$, следовательно:

$$t_{\text{общ.}} = 2t_{\text{под.}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{1.29}$$

3. Максимальную высоту подъёма найдём, подставив (1.28) в (1.24):

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

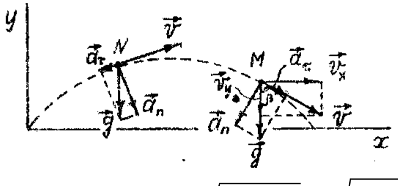
4. Подставив 1.29) в (1.21), найдём дальность полёта:

$$x_{\max} = v_0 \cos\alpha \cdot 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

5. Для определения кинематических характеристик в момент времени t' необходимо сначала выяснить, где будет находиться тело в этот момент – на спуске или на подъёме.

Пусть сравнение t' и $t_{\text{под.}}$ показало, что тело находится на спуске.

Покажем на рисунке вектор скорости $\vec{v}$ в момент времени t' и его проекции v_x и v_y. Изобразим вектор полного ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ и его проекции на направления касательной $\vec{\tau}\left(\vec{a}_\tau\right)$ и нормали $\vec{n}\left(\vec{a}_n\right)$.



$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha, \\ -v_y &= v_0 \sin\alpha - gt, \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(gt - v_0 \sin\alpha\right)^2}. \tag{1.31}$$

Из рисунка видно, что

$$a_\tau = g\sin\beta = g\left(\frac{v_y}{v}\right),$$

$$a_n = g\cos\beta = g\left(\frac{v_x}{v}\right),$$

где угол β – угол между вертикалью и касательной к траектории в точке *M*. Подставим вместо величин v_x, v_y, v их значения из (1.30) и (1.31):

$$a_\tau = \frac{g\left(gt - v_0\sin\alpha\right)}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(gt - v_0\sin\alpha\right)^2}}, \qquad (1.32)$$

$$a_n = \frac{g v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(gt - v_0\sin\alpha\right)^2}}. \qquad (1.33)$$

Радиус кривизны найдём из $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, отсюда $R = \dfrac{v^2}{a_n}$.

$$R = \frac{\left[v_0^2\cos^2\alpha + \left(v_0\sin\alpha - gt\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{g v_0\cos\alpha}. \qquad (1.34)$$

Замечания:

1. Если в задаче до определения a_τ не требовалось вычисления времени $t_{\text{под.}}$, то положение тела на траектории в момент времени t' можно задавать произвольно. Поясним это.

Допустим, в только что рассмотренной задаче мы предположили бы, что тело находится на подъёме в момент времени t' в точке *N* (см. рисунок). Тогда $v_y = v_0\sin\alpha - gt$ и

$$a_\tau = \frac{g\left(v_0\sin\alpha - gt\right)}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(v_0\sin\alpha - gt\right)^2}}. \qquad (1.35)$$

Вычисления по формуле (1.35) дали бы отрицательное значение a_τ [сравните выражения (1.33) и (1.35)]. Если же учесть, что в положении N ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено против скорости $\vec{v}$ (см. рисунок), то его отрицательное значение, вычисленное для t', и свидетельствует о том, что в этот момент $\vec{a}_\tau$ имеет направление, противоположное тому, которое мы предложили, т.е. совпадает с $\vec{v}$. А это означает, что скорость растёт, следовательно, тело находится на спуске.

2. Величину $\vec{a}_\tau$ можно найти другим способом, учитывая, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$. Выполнив дифференцирование выражения (1.31), получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g\left(gt - v_0 \sin\alpha\right)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(gt - v_0 \sin\alpha\right)^2}}.$$

Независимо от того, будем подставлять значение v_y по (1.25) или по (1.30). При таком методе нахождения a_τ неравенство $\dfrac{dv}{dt} > 0$ всегда будет означать возрастание скорости, что соответствует движению тела на спуске, а при $\dfrac{dv}{dt} < 0$ – на подъёме.

В заключение приведём структурную схему решения этой задачи (рис. 1.2).

Поскольку в данной задаче рассматриваются, по существу, все вопросы, возникающие при изучении движения тел, брошенных под углом к горизонту, алгоритм её решения может быть использован при решении других задач этого типа.

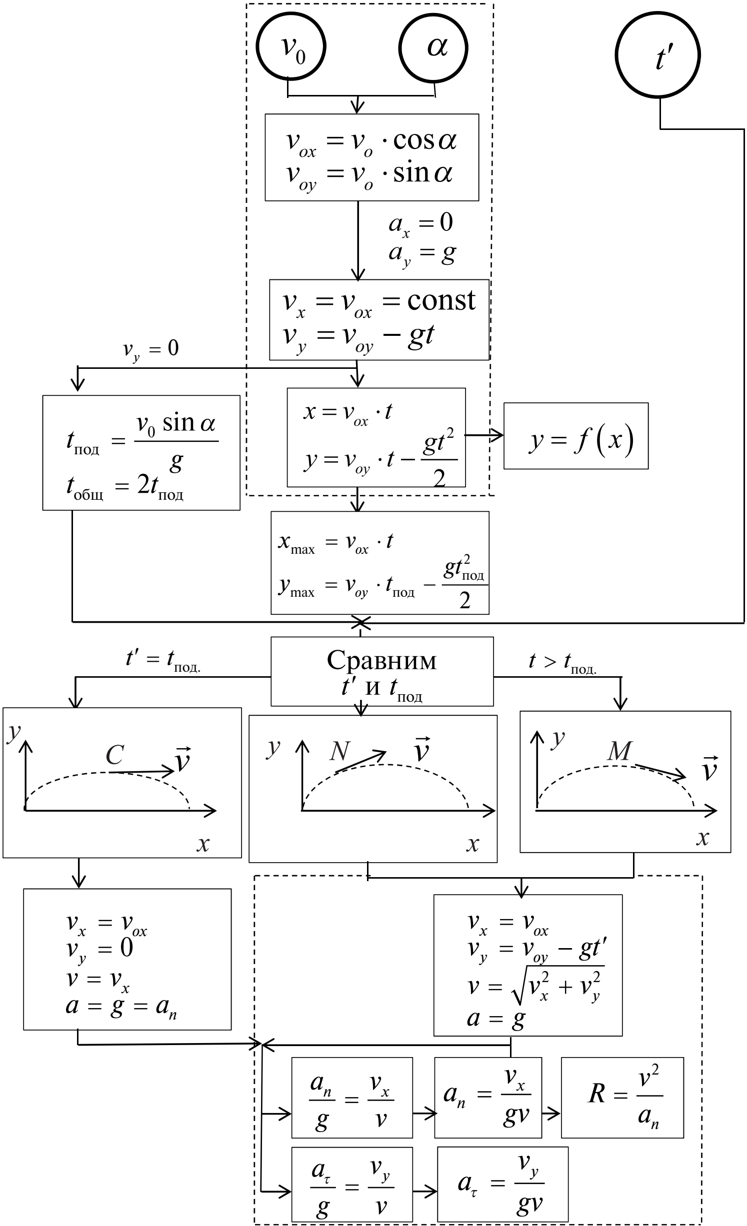

v_0
α
t'
$v_{ox} = v_o \cdot \cos\alpha$
$v_{oy} = v_o \cdot \sin\alpha$
$a_x = 0$
$a_y = g$
$v_x = v_{ox} = \text{const}$
$v_y = v_{oy} - gt$
$v_y = 0$
$t_{\text{под}} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$
$t_{\text{общ}} = 2t_{\text{под}}$
$x = v_{ox} \cdot t$
$y = v_{oy} \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$
$y = f(x)$
$x_{\max} = v_{ox} \cdot t$
$y_{\max} = v_{oy} \cdot t_{\text{под}} - \dfrac{gt_{\text{под}}^2}{2}$
$t' = t_{\text{под.}}$
Сравним t' и $t_{\text{под}}$
$t > t_{\text{под.}}$
y C $\vec{v}$ x
y N $\vec{v}$ x
y M $\vec{v}$ x
$v_x = v_{ox}$
$v_y = 0$
$v = v_x$
$a = g = a_n$
$v_x = v_{ox}$
$v_y = v_{oy} - gt'$
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
$a = g$
$\dfrac{a_n}{g} = \dfrac{v_x}{v}$
$a_n = \dfrac{v_x}{gv}$
$R = \dfrac{v^2}{a_n}$
$\dfrac{a_\tau}{g} = \dfrac{v_y}{v}$
$a_\tau = \dfrac{v_y}{gv}$

Рис. 1.2

Задача 14

Тело брошено с высоты h в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Определить: 1) как зависят от времени координаты тела и его скорость; 2) нормальное и тангенциальное ускорения через t секунд после начала движения.

Дано:

$v_0, \alpha = 0$

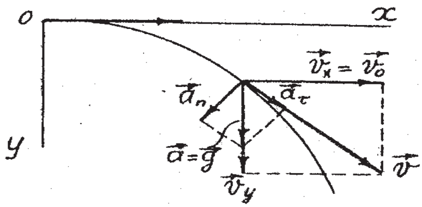
h, t

---

1. $\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\} - ?$

2. $a_n - ?$

   $a_\tau - ?$



Движение происходит в плоскости XOY, $\alpha = 0$.

Для решения воспользуемся соотношениями, очерченными пунктирными линиями на рис. 2. Из них следует:

1.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{OX} = v_0 \cos\alpha = v_0 = \text{const} \\ v_{OY} &= v_0 \sin\alpha = 0,\ v_y = v_{OY} + gt = gt \end{aligned}\right\} \qquad (1.36)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\ .$$

Из (1.36) следует:

$$x = v_x \cdot t = v_0 t,$$

$$y = v_{OY} t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}.$$

2.

$$\frac{a_n}{g} = \frac{v_0}{v}, \quad \text{откуда: } a_n = g\frac{v_0}{v} = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}};$$

$$\frac{a_\tau}{g} = \frac{v_y}{v}, \quad \text{откуда: } a_\tau = g\frac{v_y}{v} = g\frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Приложение

1. Геометрический смысл производной

Первая производная от функции в некоторой точке есть тангенс угла наклона касательной к кривой в данной точке. В точках экстремума функции производная равна нулю, на восходящем участке кривой она положительная, на падающем – отрицательная.

Вторая производная положительна на участках кривых, обращённых выпуклостью вниз, и отрицательна на участках, обращённых выпуклостью вверх. В точке перегиба кривой производная равна нулю.

2. Исследование функции на экстремум

Для нахождения координаты максимума или минимума функции необходимо 1-ю производную от неё приравнять к нулю. Затем из полученного уравнения найти значение переменного параметра, при котором функция имеет экстремум. Характер экстремума определяется 2-й производной: если она положительная – функция в этой точке имеет минимум, если отрицательная – максимум.

3. Некоторые правила приближённых вычислений

Часто, используя калькуляторы для вычислений, студенты добиваются такой точности результатов, которая совершенно не оправдана точностью использованных данных. Приведём некоторые правила приближённых вычислений.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел окончательный результат округляется так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых. (Значащими называются все цифры, кроме нуля, когда он стоит в начале числа. Нуль, стоящий в середине или в конце числа, – значащая цифра).

2. При возведении в степень (или извлечении корней) в результате значащих цифр столько, сколько их в основании степени (или в подкоренном выражении).

3. Полезно помнить следующие приближённые равенства (для случая, когда $a << 1$):

$$(1 \pm a)^2 \approx 1 \pm 2a,$$

$$(1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a,$$

$$\sqrt{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{1}{2a},$$

$$\sqrt[3]{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{1}{3a}.$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Основные понятия и соотношения

Тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называется *материальной точкой*. В основе динамики материальной точки лежат законы Ньютона. Первый закон выполняется только в инерциальных системах отсчёта (ИСО). В них же второй и третий законы в наиболее простой форме:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.1}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) носит название основного уравнения динамики материальной точки. В нём m – масса – мера инертности тела, т. е. мера его неподатливости к изменению скорости при взаимодействии с другими телами. $\vec{F}$ – сила. Она является мерой механического взаимодействия тел.

ИСО бесконечно много. Взаимосвязь между законами Ньютона для двух произвольно выбранных ИСО K и K' можно представить в виде блок-схемы (рис. 2.1).

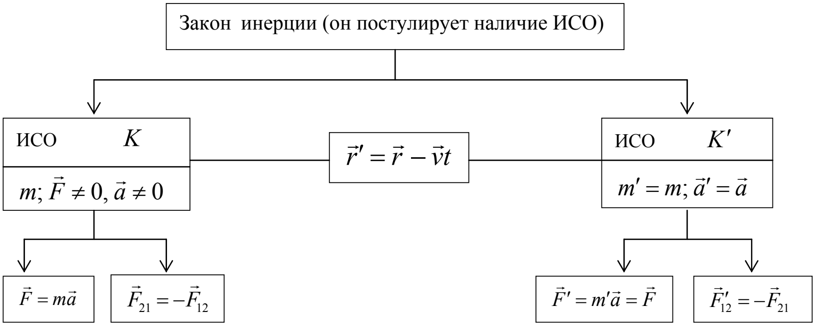


Рис. 2.1

Переход от одной ИСО к другой осуществляется с помощью преобразований Галилея.

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t\,, \tag{2.3}$$

$$t' = t\,, \tag{2.4}$$

где $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ – радиусы-векторы, определяющие положение материальной точки в ИСО K и K'; t' и t – время соответственно в системах K и K'; $\vec{v}$ – скорость движения системы K' относительно K-системы.

Обратите внимание на одинаковость написания второго и третьего законов Ньютона в разных ИСО.

Любое тело может быть представлено как совокупность материальных точек. Если в процессе движения расстояние между этими точками не меняется (или этими изменениями можно пренебречь), то такое тело называется *абсолютно твёрдым* или, короче, *твёрдым телом*.

Различают два основных вида движения твёрдого тела:

1) поступательное движение; 2) вращательное движение вокруг неподвижной оси.

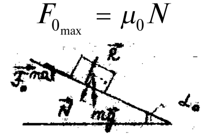
Здесь мы ограничимся рассмотрением поступательного движения, т.е. такого, при котором любая прямая, связанная с телом, всё время остаётся параллельной своему начальному положению. Из приведённого определения следует, что скорости и ускорения всех точек в данный момент времени одинаковы. Это обстоятельство позволяет описать движение тела как целого через движение его центра масс «С», который, согласно уравнению

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\ \text{внеш.}}\ , \tag{2.5}$$

движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела m, под действием всех приложенных к телу сил.

Формулы для расчёта наиболее часто встречающихся в механике сил приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид силы	Формула для вычислений	Характеристики коэффициентов
1	2	3
Сила гравитационного взаимодействия двух материальных точек	$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$	G – гравитационная постоянная; r – расстояние между телами массами m_1 и m_2
Сила тяжести	$\vec{F} = m\vec{g}$	$\vec{g}$ – ускорение свободного падения
Сила упругости	$\vec{F} = -k\vec{r}$ $F = k\Delta\ell$ – закон Гука	k – положительный коэффициент (жёсткость); $\vec{r}$ – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; $\Delta\ell$ – величина упругой деформации
Сила сухого трения: а) сила трения покоя при контакте поверхностей твёрдых тел в отсутствие смазки	$F_{0_{\max}} = \mu_0 N$  $F_{0_{\max}} = \mathrm{tg}\alpha_0 \cdot N$, $\mu_0 = \mathrm{tg}\alpha_0$	μ_0 – коэффициент трения покоя; N – сила нормального давления; $F_{0_{\max}}$ – максимальное значение силы трения покоя

Окончание табл. 2.1

1	2	3
б) сила трения скольжения	$F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N = = \mu mg \cdot \cos\alpha$	μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления
Сила вязкого трения (при движении тела в жидкости или газе)	$\vec{F}_{\text{тр.}} = -k_1\vec{v}$ при малых скоростях движения; $F_{\text{тр.}} = k_2 v^2$ при больших скоростях	k_1, k_2 – положительные коэффициенты, характеризующие данную среду (вязкость); v – скорость
Сила Архимеда	$F_{\text{А}} = mg$	g – ускорение свободного падения; m – масса вытесненной телом жидкости или газа

2.2. Классификация задач и пути их решения

Задачи этой темы можно разделить на шесть типов.

1. Задачи, в которых решается прямая задача динамики, т.е. по заданной массе и закону движения определяется сила. Решение их сводится к дифференцированию закона движения. Последовательность операций, когда закон движения задан в форме $\vec{r}(t)$, можно представить в виде:

$$\vec{r}(t) \to \vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} \to \vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \to \vec{F}_{(t)} = m\vec{a}_{(t)}.$$

2. Задачи, в которых решается обратная задача динамики, т.е. отыскивается закон движения точки по известной силе, массе, скорости $\vec{v}_0$ и положению $\vec{r}_0$ в начальный момент времени. Решение их сводится к интегрированию уравнения (2.1). Последовательность действий можно представить в виде:

$$\vec{F}_{(t)} \to \vec{a}_{(t)} \to \vec{v}_{(t)} - \vec{v}_0 = \int_0^t \frac{\vec{F}_{(t)}}{m} dt \to \vec{r}_{(t)} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v}_{(t)} dt.$$

3. Задачи, в которых по известной зависимости двух или нескольких величин от времени (например, $x(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$,

$\vec{F}(t)$ требуется установить связь между этими величинами, т.е. $\vec{F}(x)$, $\vec{F}(v)$ и т.д. Такие задачи решаются исключением времени из соответствующих соотношений.

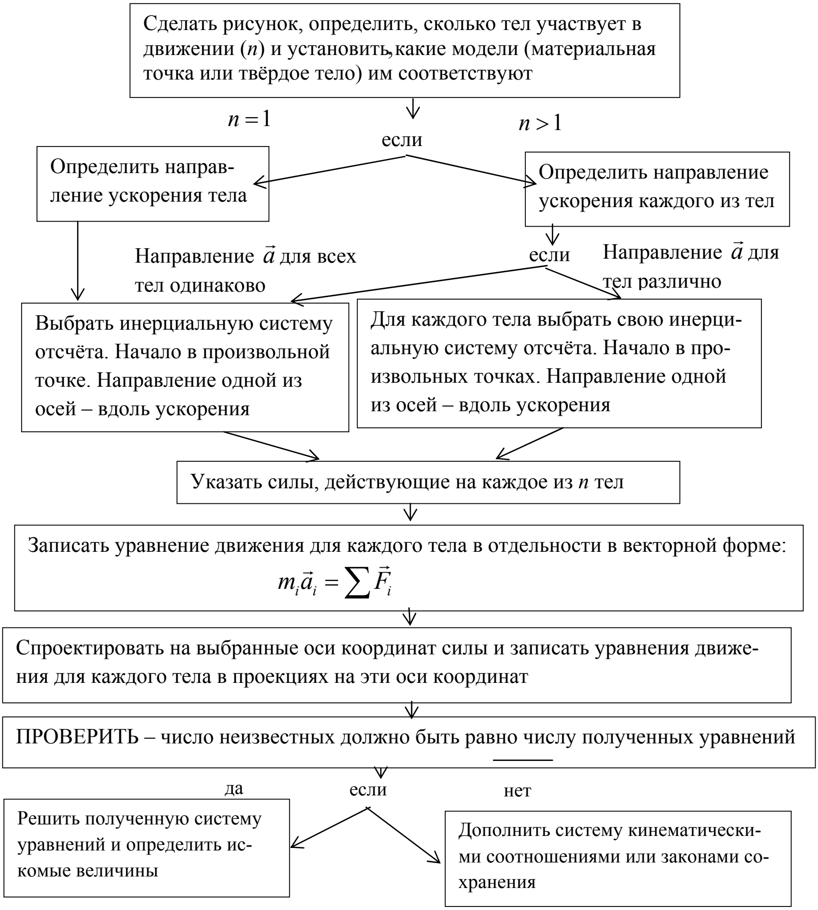


Рис. 2.2

4. Задачи, обратные предыдущим. В их условии даётся связь между параметрами, например $\vec{F}(v)$, а требуется установить зависимость этих параметров от времени. Они решаются путём решения дифференциального уравнения, полу-

чающегося в результате сопоставления соответствующих функций (например, $\vec{F}(v)$ и $v = \dfrac{dx}{dt}$).

5. Задачи, в которых требуется определить условия равновесия (неравновесия) и устойчивости (неустойчивости) движения тел в заданном поле сил. Их решение сводится к нахождению функций $\vec{F}(r), U(r)$ (где $U(r)$ – потенциальная энергия тела в заданном поле) и их последующему дифференцированию по $\vec{r}$.

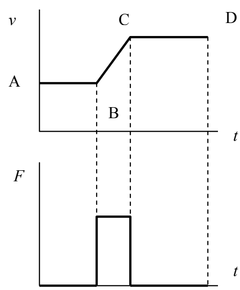
6. Задачи, в которых рассматривается движение тела или взаимодействующих тел под действием нескольких сил. Наиболее просто, на наш взгляд, они решаются с помощью *алгоритмического предписания*, приведённого на рис. 2.2.

2.3. Примеры решения задач

Задача 1

На рисунке приведена зависимость скорости движущегося тела от времени. Постройте график зависимости $F(t)$.

Решение



На участке АВ $v = \text{const}$, следовательно, $a = 0$, т.е. $\sum \vec{F}_i = 0$. На участке ВС скорость изменяется линейно с течением времени, т.е. тело движется равноускоренно, значит $a = \text{const}$, следовательно, на тело действует некоторая постоянная сила $F = ma$. На участке CD движение равномерное, т.е. $\sum \vec{F}_i = 0$.

Задача 2 *(задача первого типа)*

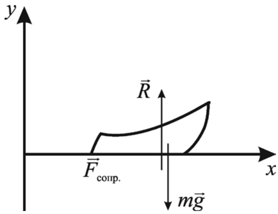
Определить силу сопротивления воды движению лодки массой m, если её движение происходит согласно уравнению

$$x = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right),$$

где v_0 – начальная скорость движения; k – постоянный коэффициент. Сила сопротивления движению является функцией только скорости лодки.

Решение

Сделаем схематический рисунок. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с берегом. Ось OX направлена вдоль поверхности воды по движению лодки. Лодка взаимодействует с Землёй и с водой. В результате возникают силы взаимодействия: $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{R}$ – сила реакции воды; $\vec{F}_{сопр.}$ – сила сопротивления воды движению лодки, направленная в сторону, противоположную её движению.



Проекция скорости лодки на ось OX:

$$v_x = \dot{x} = \left(-\frac{m}{k}\right)\left(-\frac{k}{m}\right)v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Проекция ускорения лодки на ось OX:

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{k}{m}v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Дифференциальное уравнение движения лодки:

$$m\ddot{x} = -F_{\text{сопр.}}.$$

Находим силу сопротивления:

$$F_{\text{сопр.}} = k v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

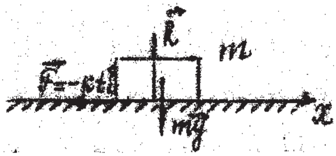
Заменив $v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, получаем $F_{\text{сопр.}} = k v_x$. Итак, $\vec{F}_{\text{сопр.}}$ является линейной функцией скорости. Этот закон справедлив при малых скоростях.

Задача 3 *(задача второго типа)*

Двигатель тормозной системы развивает силу тяги, пропорциональную времени: $F = -kt$, где k – постоянный коэффициент. Пренебрегая трением, определить, через сколько времени от момента включения тормозного двигателя тело массой m, на котором установлен такой двигатель, остановится. В момент включения двигателя скорость тела составляла v_0. Считать, что масса двигателя много меньше массы тела.

Решение

Сделаем схематический рисунок.



В задаче рассматриваем движение одного тела массой m, которое можно принять за материальную точку. Начальные условия: $v = v_0,\ x = 0$ при $t = 0$. Траектория движения – прямая. Конечная скорость тела равна нулю: $v_t = 0$ при $t = t_1$. За инерциальную систему отсчёта примем Землю. Данное тело взаимодействует с Землёй (возникает сила тяжести – $m\vec{g}$; сила реакции опоры – $\vec{R}$; эти силы взаимно уравновешивают друг друга) и в результате действия тормозного двигателя возникает сила тяги $\vec{F} = -kt\vec{i}$.

Запишем дифференциальное уравнение для скорости (как функции от времени t):

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -kt.$$

Разделяя переменные, интегрируя и учитывая начальные условия, находим закон изменения скорости:

$$mdv(t) = -ktdt;\ \ m\int_{v_0}^{v(t)} dv(t) = \int_0^t -ktdt;\ \ v_t = v_0 - \frac{kt^2}{2m}.$$

Так как конечная скорость v_t равна нулю, получаем уравнение для определения времени движения t_1:

$$0 = v_0 - \frac{kt_1^2}{2m}.$$

Отсюда находим формулу для вычисления искомого времени:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}}.$$

Если усложнить задачу и поставить вопрос определения тормозного пути x_1, то необходимо знать закон движения. Для этого проинтегрируем закон изменения скорости:

$$v = v_0 - \frac{kt^2}{2m} \quad \left(dx = v(t)\,dt;\; x(t) = \int v(t)\,dt\right),$$

получим

$$x = v_0 t - \frac{kt^3}{6m}.$$

Подставляя в закон движения значение времени торможения t_1, находим тормозной путь:

$$x_1 = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{k}}.$$

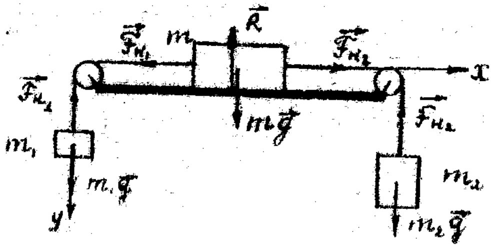
Задача 4 *(задача шестого типа)*

На горизонтальном столе лежит брусок $m = 4\,\text{кг}$. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикреплённые к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири $m_1 = 1\,\text{кг}$, $m_2 = 2\,\text{кг}$. Найти ускорение бруска $\vec{a}$ и силы натяжения каждого из шнуров $F_{\text{н}_1}$ и $F_{\text{н}_2}$. Массой блоков и трением пренебречь.

Дано:
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 2$ кг
$m_{бр} = 4$ кг

---

a – ? $F_{н1}$ – ?
$F_{н2}$ – ?



Решение

В задаче движутся три тела. Будем считать их материальными точками, а шнуры – невесомыми и нерастяжимыми. Нерастяжимость шнуров приводит к тому, что ускорения всех тел одинаковы.

Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй; оси координат OX и OY направим так, как показано на рисунке.

Рассмотрим тело m_1. На него действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ (в результате взаимодействия тела m_1 с Землёй), сила натяжения нити $\vec{F}_{н_1}$ (в результате взаимодействия тела и нити). Запишем уравнение движения этого тела:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{F}_{н_1}. \qquad (2.6)$$

Спроецируем эти силы на ось OY:

$$-m_1 a = m_1 g - F_{н_1}. \qquad (2.6')$$

Рассмотрим тело m. На него действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (в результате взаимодействия тела m с Землёй), сила реакции опоры $\vec{R}$ (в результате взаимодействия тела со столом), силы натяжения $\vec{F}_{н_1}$ и $\vec{F}_{н_2}$ (в результате взаимодействия тела с нитями). Запишем уравнение движения тела m:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{н_1} + \vec{F}_{н_2}. \qquad (2.7)$$

Спроецируем эти силы на ось OX:

$$ma = F_{н_2} - F_{н_1}. \qquad (2.7')$$

Рассмотрим тело m_2. На него действуют следующие силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$ (в результате взаимодействия тела m_2 с Землёй), сила натяжения нити $\vec{F}_{н_2}$ (в результате взаимодействия тела m_2 и нити). Запишем уравнение движения тела m_2:

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{F}_{н_2}. \qquad (2.8)$$

Спроецируем эти силы на ось OY:

$$m_2 a = m_2 g - F_{н_2}. \qquad (2.8')$$

Решая совместно (2.6) – (2.8), получим

$$F_{н_1} = m_1 g + m_1 a;$$

$$F_{н_2} = m_2 g - m_2 a;$$

$$ma = m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a;$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m + m_1 + m_2};$$

$$F_{н_1} = m_1 g + \frac{m_1 g(m_2 - m_1)}{m + m_1 + m_2} = \frac{m_1 mg + m_1^2 g + m_1 m_2 g}{m + m_2 + m_3} +$$

$$+\frac{m_1 m_2 g - m_1^2 g}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m_1 g(m + 2m_2)}{m_1 + m_2 + m};$$

$$F_{н_2} = \frac{m_2 g(m + 2m_1)}{m_1 + m_2 + m}.$$

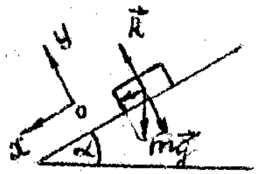
Задача 5

Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $\mu = kx$, где k – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки.

Решение

В этой задаче рассматривается движение под действием переменной результирующей силы.

На брусок действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (результат взаимодействия бруска с Землёй), сила реакции опоры $\vec{R}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$ (результат взаимодействия бруска с наклонной плоскостью).



ИСО связываем с Землёй.

Запишем уравнение движения этого тела в векторной форме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{тр.}}, \qquad (2.9)$$

где $F_{\text{тр.}} = \mu N$, N – сила нормального давления.

Выберем оси OX и OY, как показано на рисунке. Спроецируем на них силы и запишем второй закон Ньютона в виде двух уравнений в проекциях:

на ось X:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр.}}; \qquad (2.10)$$

на ось Y:

$$0 = -mg\cos\alpha + R. \qquad (2.11)$$

Решив данную систему, получим

$$a = g\left(\sin\alpha - kx\cos\alpha\right), \qquad (2.12)$$

т.е. ускорение оказывается зависимым от координаты x.

Чтобы найти путь, пройденный до остановки, воспользуемся кинематическими соотношениями:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}. \qquad (2.13)$$

После подстановки выражения (2.13) в уравнение (2.12) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v\frac{dv}{dx} = g\left(\sin\alpha - kx\cos\alpha\right);\ vdv = g\left(\sin\alpha - kx\cos\alpha\right)\cdot dx. \qquad (2.14)$$

Интегрируя (2.14), получаем

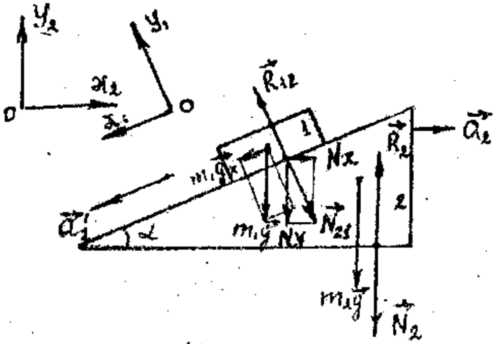
$$\int_{v_0=0}^{v_{\text{ост}}=0} v dv = \int_{x_0=0}^{x=x_{\text{ост}}} g\left(\sin\alpha - k x \cos\alpha\right) dx;$$

$$0 = g\left(\sin\alpha \cdot x_{\text{ост}} - k\cos\alpha\,\frac{x_{\text{ост}}^2}{2}\right);\; x_{\text{ост}} = \frac{2g\,\text{tg}\alpha}{k}.$$

Данную задачу можно решить, используя закон сохранения энергии, так как при известной зависимости силы трения от расстояния вычисление работы не вызывает затруднений.

Задача 6

На горизонтальной поверхности находится клин массой m_2 с углом α. На грань клина кладут брусок массой m_1. Найти ускорение клина и силы N_{21} и N_2, с которыми брусок давит на клин и клин давит на плоскость. Все поверхности соприкасающихся тел считать гладкими.



Решение

Первый способ. ИСО свяжем с Землёй. Ускорение бруска относительно Земли обозначим через $\vec{a}_1$, ускорение клина – $\vec{a}_2$.

На брусок действуют следующие силы: сила притяжения – $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры (клина) – $\vec{R}_{12}$. Запишем уравнение движения бруска в векторной форме:

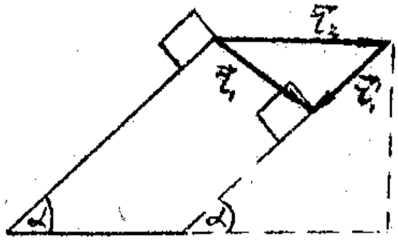
$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{R}_{12}. \qquad (2.15)$$

На клин действуют следующие силы: сила тяжести – $m_2\vec{g}$, сила давления бруска – $\vec{N}_{21}$, сила реакции опоры (плоскости) – $\vec{R}_2$. Уравнение движения клина в векторной форме:

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_{21} + \vec{R}_2. \qquad (2.16)$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{R}_{12} = -\vec{N}_{21}, \left|\vec{R}_{12}\right| = \left|\vec{N}_{21}\right| = R.$

Выберем оси координат OX_1 и OY_1, OX_2 и OY_2 так, как показано на рисунке.



Уравнение кинематической связи: $\vec{r}_1 = \vec{r}_1' + \vec{r}_2$.

Продифференцировав по времени, получим

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1' + \vec{a}_2. \qquad (2.17)$$

Векторное уравнение движения для бруска с учётом кинематической связи

$$m_1\left(\vec{a}_1' + \vec{a}_2\right) = m_1\vec{g} + \vec{R}_{12}. \qquad (2.18)$$

Уравнения движения в проекциях на оси координат:

для бруска

$$x_1 : m_1\left(a_1' - a_2\cos\alpha\right) = m_1 g \cdot \sin\alpha, \qquad (2.19)$$

$$y_1 : -m_1 a_2 \sin\alpha = R - m_1 g\cos\alpha; \qquad (2.20)$$

для клина

$$x_2 : m_2 a_2 = R \sin\alpha , \tag{2.21}$$

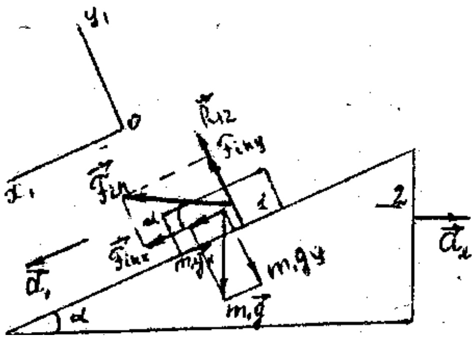
$$y_2 : 0 = -m_2 g + R_2 - R\cos\alpha . \tag{2.22}$$

Решив систему уравнений (2.20) и (2.21), находим

$$a_2 = \frac{m_1 g \sin 2\alpha}{2\left(m_2 + m_1 \sin^2\alpha\right)}; \quad R = \frac{m_1 g \cos\alpha}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha};$$

$$N_2 = m_2 g + R\cos\alpha = \frac{g\left(m_1 + m_2\right)}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha}.$$

Второй способ (решение задачи с применением неинерциальной системы отсчёта).



Пусть a_1 – ускорение бруска в системе отсчёта, связанной с клином. Эта система отсчёта является неинерциальной, так как клин движется относительно Земли (ИСО) с ускорением $\vec{a}_2$. На брусок кроме сил $m_1\vec{g}$ и $\vec{R}_{12}$ действует сила инерции:

$$\vec{F}_{in} = -m_1\vec{a}_2 . \tag{2.23}$$

Запишем уравнение движения бруска в системе отсчёта, связанной с клином, в векторной форме:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1 g + \vec{R}_{12} + \vec{F}_{in} . \tag{2.24}$$

В проекциях на оси координат OX и OY уравнения движения принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &: \; m_1 a_1 = m_1 g \cdot \sin\alpha + m_1 a_2 \cdot \cos\alpha \\ y_1 &: \; 0 = -m_1 g \cdot \cos\alpha + R + m_1 a_2 \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Рассматривая движение клина по-прежнему относительно Земли, приходим к уравнениям (2.21) и (2.22). Исключая R из уравнений (2.25) и (2.21), получаем тот же результат для ускорения a_2, не прибегая к уравнению кинематической связи:

$$R = \frac{m_2 a_2}{\sin\alpha}; \quad 0 = -m_1 g \cdot \cos\alpha + \frac{m_2 a_2}{\sin\alpha} + m_1 a_2 \cdot \sin\alpha;$$

$$a_2 = \frac{m_1 g \cdot \sin 2\alpha}{2\left(m_2 + m_1 \cdot \sin^2\alpha\right)}.$$

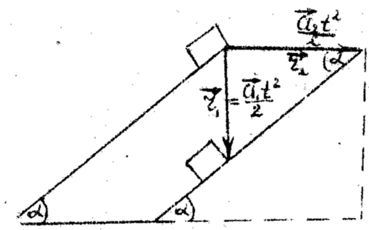
Анализ результатов:

а) пусть $m_2 >> m_1$ (очень тяжёлый клин). Тогда $\frac{m_2}{m_1} \to \infty$, $a_2 \to 0$, т. е. клин неподвижен;

б) $m_1 >> m_2$ (тяжёлый брусок на очень лёгком клине), $\frac{m_2}{m_1} \to 0$, $a_2 \to g \cdot \mathrm{ctg}\alpha$. Тяжёлый брусок практически свободно падает с ускорением $\vec{g}$ и вытесняет клин. Перемещение бруска r_1:

$$r_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{g t^2}{2};$$

перемещение клина $r_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$.



Из рисунка видно, что $\frac{a_2 t^2}{2} = \frac{a_1 t^2}{2}\mathrm{ctg}\alpha$, т.е. $a_2 = g \cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

3.1. Основные понятия и соотношения

Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Динамика такого движения описывается уравнениями:

$$\sum M_{iz} = I\varepsilon_z \,, \tag{3.1}$$

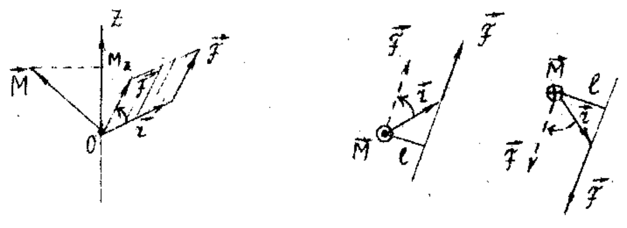
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz} \,, \tag{3.2}$$

где M_{iz} – алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси Z; ε_z – угловое ускорение твёрдого тела относительно оси Z; L_z – момент импульса твёрдого тела относительно оси Z; I – момент инерции твёрдого тела относительно оси Z. Приведём определения этих понятий.

Момент силы относительно оси Z – это проекция на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$, определённого относительно произвольной точки O данной оси (рис. 3.1 а). Из рисунка нетрудно видеть, что знак момента силы относительно оси M_z зависит как от выбора положительного направления оси, так и от направления вектора $\vec{M}$. Положительное направление оси Z может быть выбрано произвольно. Направление же момента силы $\vec{M}$ задаётся его определением:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right], \tag{3.3}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый из выбранной за начало отсчёта точки O в точку приложения силы.



а *б*

Рис. 3.1

Из (3.3) следует, что $\vec{M}$ – вектор аксиальный, т.е. он перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Его направление может быть определено по правилу: если смотреть вдоль вектора $\vec{M}$, то вращение по кратчайшему расстоянию от вектора $\vec{r}$ к перенесённому параллельно самому себе в точку O вектору $\vec{F}$ видно происходящим по часовой стрелке. Учитывая важность этого правила, дополнительно иллюстрируем его на рис. 3.1 б, на котором для двух произвольных направлений сил показаны направления вектора $\vec{M}$: кружком с точкой обозначен вектор $\vec{M}$, направленный на нас, кружком с крестиком – от нас. Из этого же рисунка следует, что абсолютное значение момента силы может быть определено из соотношения

$$M = rF\sin\alpha = F\ell,$$

где ℓ – плечо силы, т.е. кратчайшее расстояние от точки O до линии её действия.

Очевидно, что в ситуации, показанной на рис. 3.1 а, M_z – положителен.

Знак суммарного момента ΣM_{iz}, согласно (3.1), определяет знак углового ускорения ε_z.

Момент импульса твёрдого тела относительно оси Z – это сумма моментов импульса частиц, составляющих тело, относительно оси Z:

$$L_z = \sum L_{iz}. \tag{3.4}$$

Момент же импульса частицы относительно оси Z вводится аналогично понятию момента силы относительно оси, т.е. он равен проекции на ось Z вектора момента импульса частицы $\vec{L}$, определённого относительно произвольной точки O этой оси (рис. 3.2).

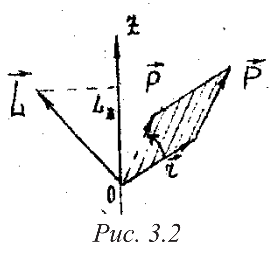


Рис. 3.2

Направление вектора $\vec{L}$ вытекает из

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{P}\right] \qquad (3.5)$$

и определяется по вышеприведённому правилу, только вращение осуществляется, естественно, от вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{P}$. Проецируя (3.5) на ось Z и подставляя полученный результат в (3.4), будем иметь:

$$L_z = \left(\sum m_i R_i^2\right)\omega_z = I\omega_z, \qquad (3.6)$$

где m_i и R_i – соответственно масса i-частицы и кратчайшее расстояние от неё до оси Z.

Входящий в (3.6) и (3.1) в качестве коэффициента пропорциональности момент инерции I характеризует инерционные свойства твёрдых тел при вращении. Из (3.6) нетрудно видеть, что он зависит от распределения масс относительно интересующей нас оси и является величиной аддитивной. Моменты инерции некоторых однородных твёрдых тел относительно оси Z, проходящей через центр масс C тела, приведены в табл. 3.1 (m – массы рассматриваемых тел).

Таблица 3.1

Форма твёрдого тела	Положение оси	Момент инерции
Тонкий стержень длиной ℓ	Ось перпендикулярна стержню и проходит через: а) его середину; б) конец стержня	а) $I = \dfrac{m\ell^2}{12}$ б) $I = \dfrac{m\ell^2}{3}$
Полый тонкостенный цилиндр (или кольцо) радиусом R	Ось совпадает с осью цилиндра; ось перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр	$I = mR^2$
Сплошной цилиндр (диск) радиусом R	Ось совпадает с осью цилиндра; ось перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр	$I = \dfrac{m\ell^2}{2}$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$I = \dfrac{2}{5}mR^2$

В случае, если ось не проходит через центр масс, то момент инерции относительно такой оси может быть найден по теореме Штейнера:

$$I = I_c + ma^2, \tag{3.7}$$

где I_c – момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела; a – расстояние между осями.

В заключение сопоставим формулы механики поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси (табл. 3.2). Из этого сопоставления следует, что во всех случаях роль линейной скорости играет угловая скорость, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль массы – момент инерции, роль импульса – момент импульса, силы – момент силы.

Таблица 3.2

Поступательное движение	Вращение
$\vec{v}$ – линейная скорость	$\vec{\omega}$ – угловая скорость
$\vec{a}$ – линейное ускорение	$\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение
m – масса	I – момент инерции
$\vec{P} = m\vec{v}$ – импульс	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ – момент импульса
$\vec{F}$ – сила	$\vec{M}$ – момент силы
$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ – уравнение движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ – уравнение движения
$m\vec{a} = \vec{F}$ – уравнение движения	$I\varepsilon_z = M_z$ – уравнение движения
$E_к = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия	$E_к = \frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия
$dA = F_s ds$ – работа	$dA = M_\omega d\varphi$ – работы
$P = F_v v$ – мощность	$P = M_\omega \omega$ – мощность

3.2. Классификация задач и пути их решения

Задачи этого раздела можно разделить на три типа:

1. Задачи на отработку понятий момента силы и момента импульса.

2. Задачи на вычисления момента инерции системы материальных точек и твёрдого тела.

3. Задачи на применение основного закона динамики вращательного движения.

Задачи *первого типа* решаются применением определений искомых физических величин к заданным физическим ситуациям.

При решении задач *второго типа* момент инерции для системы материальных точек может быть вычислен по соотношению

$$I = \sum m_i R_i^2 , \tag{3.8}$$

где m_i – масса i-й материальной точки; R – её расстояние от оси вращения, а для неоднородного твёрдого тела по формуле

$$I = \int_V \rho r^2 dV , \tag{3.9}$$

где ρ – плотность тела; r – расстояние от объёма dV до оси, относительно которой вычисляется момент инерции. Однако для тел сложной формы вычисления по последней формуле во многих случаях связаны с серьёзными математическими трудностями. Часто эти трудности могут быть преодолены следующим образом:

1) тело произвольной формы разбивается на части такой формы, для которых интеграл (3.9) известен или легко может быть взят;

2) с помощью теоремы Штейнера вычисляется момент инерции каждой из частей относительно данной оси;

3) момент инерции твёрдого тела находится как сумма моментов инерции его частей.

Указанный подход позволяет, в частности, вычислить момент инерции тела, имеющего полости, как разность между моментом инерции сплошного тела и суммой моментов инерции тел, совпадающих по форме с полостями.

Рассмотрим далее кратко ход решения задач *третьего типа*. В них обычно рассматривается либо система тел, связанных нитями, одно из которых вращается, а остальные совершают поступательное или вращательное движения, либо одиночное тело, совершающее сложное, например, плоское движение. В обоих случаях нужно сначала выбрать систему отсчёта и установить, инерциальна ли она. Затем на рисунке необходимо изобразить все силы, действующие на тела системы или на данное тело. После этого для тел, участвующих в движении, необходимо в векторной форме записать соответствующий закон динамики – второй закон Ньютона для тел, которые могут быть представлены как материальные точки, уравнения движения центра масс или основного закона динамики вращательного движения для твёрдых тел. Для одиночного тела, совершающего сложное движение, необходимо записать уравнения движения центра масс и основного закона динамики вращательного движения.

Полученная таким образом система векторных уравнений чаще всего аналитически не решается, вследствие чего возникает необходимость перехода к координатной форме записи. Ориентация осей координат может быть выбрана произвольной. Обычно направления осей выбирают так, чтобы при проецировании на них сил и ускорений получались наиболее простые выражения. Можно для всех тел указать общую систему координат, но можно также для каждого тела выбрать свою систему.

После выбора координатных осей надо записать систему уравнений в проекциях на координатные оси. Если полученная в результате этого система уравнений оказывается неполной, т.е. число уравнений оказывается меньше числа неизвестных, то её следует дополнить уравнениями, которые выражают связь между угловыми и линейными ускорениями тел. При этом следует иметь в виду, что, так как нити, связывающие тела, всегда предполагаются нерастяжимыми, линейное ускорение тела, совершающего поступательное движение, равно касательному ускорению тех точек связанного с ним вращающегося тела, с которым соприкасается нить.

Получив замкнутую систему уравнений, её следует разрешить относительно неизвестных величин и проанализировать результаты.

В заключение, исходя из изложенного, кратко запишем последовательность операций, выполняя которые, можно решить задачи третьего типа.

1. Сделать рисунок и установить, какие модели (материальная точка или твёрдое тело) соответствуют телам, участвующим в движении.

2. Выбрать систему отсчёта: инерциальную или неинерциальную.

3. Указать на рисунке все силы, действующие на каждое тело.

4. Записать для всех тел законы динамики в векторной форме.

5. Изобразить на рисунке выбранные оси координат и записать полученную в предыдущем пункте систему динамических уравнений в проекциях на эти оси.

6. Если полученная таким образом система уравнений оказывается неполной, то её следует дополнить уравнениями, выражающими связь между угловым и линейным ускорениями.

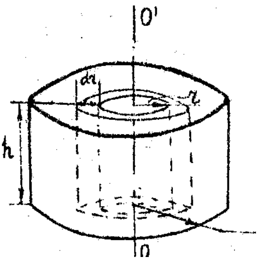
7. Решить полную систему уравнений сначала в общем виде, а затем вычислить результат.

8. Проанализировать ход решения и его результат.

3.3. Примеры решения задач

Задача 7

Вычислить момент инерции сплошного однородного цилиндра массой m относительно оси симметрии OO' (рисунок). Высота цилиндра h, радиус основания – R.



Решение

Для решения задачи воспользуемся соотношением (3.9). Чтобы вычислить по нему искомый момент инерции, разобьём мысленно сплошной цилиндр на совокупность тонкостенных полых цилиндров радиусом r и толщиной стенки dr (см. рисунок). Ввиду малости dr будем полагать, что все частицы такого тонкостенного цилиндра находятся на расстоянии r от оси вращения. Найдём объём этого цилиндра $dV = h2\pi r dr$ и подставим его в (3.9). Поскольку цилиндр однороден, его плотность ρ во всех точках одинакова и в (3.9) её можно вывести за знак интеграла. С учётом этого получим

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_0^R 2\pi h r^3 dr \,.$$

Величина $2\pi h$ также постоянна, поэтому и её можно вынести за знак интеграла:

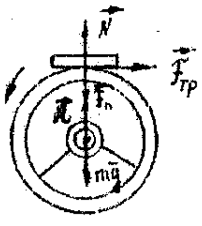
$$I = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} \,.$$

Наконец, введя массу цилиндра, равную произведению плотности ρ на его объём $\pi R^2 h$, окончательно будем иметь

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Задача 8

С какой силой следует прижать тормозную колодку к колесу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (см. рисунок) со скоростью $n = 30$ об/с, для его остановки в течение $t = 20$ с? Массой втулки и спиц пренебречь и считать, что масса колеса $m = 10$ кг распределена по ободу, радиус обода $R = 0{,}1$ м, коэффициент трения между колодкой и ободом $\mu = 0{,}5$.



Решение

Исходя из условия задачи, колесо и колодка – твёрдые тела. Свяжем ИСО с Землёй. Укажем силы, действующие на тела системы. Колодка действует на колесо с силой $\vec{F}_n$, на колодку действует равная $\vec{F}_n$ по абсолютному значению сила $\vec{N}$. На колесо действует сила $m\vec{g}$ и равная ей по величине сила реакции оси $\vec{R}$, а также сила трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$.

Поскольку движется только колесо, для него запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \qquad (3.10)$$

Направим ось в сторону вектора угловой скорости (т.е. перпендикулярно плоскости рисунка и на нас) и спроецируем на неё уравнение (3.10). Тогда получим

$$I\varepsilon = F_{\text{тр.}}R. \qquad (3.11)$$

Выразим входящие в (3.11) неизвестные величины через известные. Так как масса колеса распределена по ободу, т.е.

все частицы колеса находятся на одинаковом расстоянии R от оси вращения, то момент инерции колеса

$$I = mR^2 . \tag{3.12}$$

Найдём ε из следующих соображений. Сила трения постоянна, поэтому колесо вращается равнозамедленно и его угловая скорость меняется по закону

$$\omega_t = \omega_0 - \varepsilon t . \tag{3.13}$$

В момент остановки $\omega_t = 0$, тогда из (3.13) имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} . \tag{3.14}$$

Сила трения

$$F_{\text{тр.}} = \mu F_n , \tag{3.15}$$

где F_n – искомая сила нормального давления. Подставляя (3.12), (3.14) и (3.15) в (3.11), получим

$$mR^2 \frac{2\pi n}{t} = \mu F_n R , \tag{3.16}$$

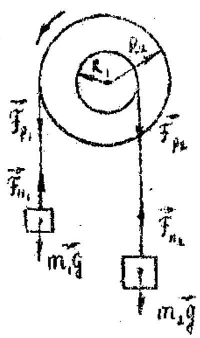
откуда

$$F_n = \frac{2\pi n m R}{\mu t} .$$

Подставляя численные значения, найдём $F_n = 18{,}9\,\text{Н}$.

Задача 9

На ступенчатый вал, радиусами $R_1 = 0{,}3\,\text{м}$ и $R_2 = 0{,}1\,\text{м}$, намотаны в противоположных направлениях нити, к концам которых привязаны грузы массами $m_1 = 2\,\text{кг}$ и $m_2 = 3\,\text{кг}$ (см. рисунок). Момент инерции вала $I = 0{,}3\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Пренебрегая силой трения, определить ускорения грузов и силы натяжения нитей.



Решение

Будем полагать, что массы, привязанные к нитям, – материальные точки, а вал – абсолютно твёрдое тело. Свяжем с Землёй ИСО. Изобразим на рисунке силы, действующие на тела рассматриваемой системы: $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, $\left|\vec{F}_{н_1}\right| = \left|\vec{F}_{р_1}\right| = F_{н_1}$ и $\left|\vec{F}_{н_2}\right| = \left|\vec{F}_{р_2}\right| = F_{н_2}$ – соответственно силы натяжения $F_н$ и растяжения $F_р$ нитей.

Предположим, что груз m_1 движется вниз с ускорением $\vec{a}_1$, тогда груз m_2 движется вверх с ускорением $\vec{a}_2$, а вал вращается против часовой стрелки с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$. С учётом этого для каждого из трёх тел, участвующих в движении, запишем уравнение динамики в проекциях на соответствующие направления. Для каждого из грузов запишем второй закон Ньютона в проекциях на направления своих ускорений:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{н_1}, \tag{3.17}$$

$$m_2 a_2 = F_{н_2} - m_2 g, \tag{3.18}$$

а основной закон динамики вращательного движения для вала – в проекции на ось, перпендикулярно к плоскости рисунка и направленную на нас:

$$F\varepsilon = F_{н_1} R_1 - F_{н_2} R_2. \tag{3.19}$$

Поскольку полученная система уравнений (3.17) – (3.19) – неполная, дополним её двумя уравнениями, выражающими связь между линейными ускорениями грузов и угловым ускорением вала:

$$a_1 = R_1\varepsilon, \tag{3.20}$$

$$a_2 = R_2\varepsilon. \tag{3.21}$$

В результате получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными: $\varepsilon, a_1, a_2, F_{н_1}, F_{н_2}$. Решим её. Из уравнений (3.17) и (3.18) с учётом (3.20) и (3.21) будем иметь:

$$F_{н_1} = m_1\left(g - a_1\right) = m_1\left(g - R_1\varepsilon\right), \tag{3.22}$$

$$F_{н_2} = m_2\left(g + a_2\right) = m_2\left(g + R_2\varepsilon\right). \qquad (3.23)$$

После подстановки (3.22), (3.23) в (3.19) получим уравнение, содержащее только одно неизвестное – угловое ускорение ε:

$$I\varepsilon = m_1\left(g - R_1\varepsilon\right)R_1 - m_2\left(g + R_2\varepsilon\right)R_2.$$

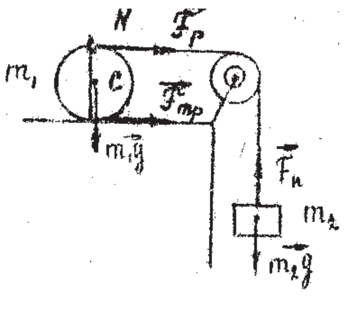
Из последнего уравнения находим

$$\varepsilon = \frac{\left(m_1R_1 - m_2R_2\right)g}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}.$$

Подставив числовые значения, будем иметь $\varepsilon = 5,77\,\text{с}^{-2}$. С учётом этого значения из (3.20), (3.21) находим ускорения грузов: $a_1 = 1,7\,\text{м/с}^2$, $a_2 = 0,6\,\text{м/с}^2$ и из (3.22), (3.23) – натяжения нитей $F_{н_1} = 16,2\,\text{Н}$, $F_{н_2} = 81,2\,\text{Н}$.

Задача 10

На сплошной цилиндр массой $m_1 = 10\,\text{кг}$ и радиусом $R = 10\,\text{м}$ намотана невесомая и нерастяжимая нить. К концу нити, перекинутой через невесомый блок, привязан груз массой $m_2 = 20\,\text{кг}$ (см. рисунок). Под действием груза цилиндр движется по горизонтальной плоскости без скольжения. Определить ускорение центра масс цилиндра a_c, ускорение a груза, силу натяжения нити и силу трения, соответствующую движению цилиндра без скольжения.



Решение

Исходя из условия задачи, можно принять: физическая система состоит из твёрдого тела – цилиндра и материальной точки – груза. Движение будем рассматривать в ИСО, связанной с Землёй. Отметим силы, действующие на тела системы. На груз действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_{\text{н}}$. На цилиндр действуют четыре силы: сила растяжения нити $\left|\vec{F}_{\text{р}}\right| = \left|\vec{F}_{\text{н}}\right|$, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (последние силы взаимно уравновешивают друг друга).

Запишем динамические уравнения для обоих тел в проекциях на соответствующие оси. Для груза в качестве положительного направления оси выберем направление, совпадающее с направлением его движения. В проекции на эту ось второй закон Ньютона запишется в виде

$$m_2 a = m_2 g - F_{\text{н}}. \tag{3.24}$$

Цилиндр участвует в двух движениях: поступательном и во вращательном вокруг неподвижной оси. В соответствии с этим для цилиндра запишем два уравнения: уравнение движения центра масс и основное уравнение динамики вращательного движения.

Первое уравнение в проекции на ось, положительное направление которой совпадает с направлением движения цилиндра (направление оси выбираем сами), запишется в виде

$$m_1 a_c = F_{\text{р}} + F_{\text{тр}}. \tag{3.25}$$

Поскольку $\left|\vec{F}_{\text{р}}\right| = \left|\vec{F}_{\text{н}}\right| = F_{\text{н}}$, можно $F_{\text{р}}$ заменить на $F_{\text{н}}$. Тогда

$$m_1 a_c = F_{\text{н}} + F_{\text{тр}}. \tag{3.26}$$

Направим ось, на которую будем проектировать основное уравнение динамики вращательного движения, перпендикулярно рисунку и на нас. Тогда в проекции на эту ось получим

$$\frac{1}{2} m_1 R^2 \varepsilon = \left(F_{\text{н}} - F_{\text{тр}}\right) R. \tag{3.27}$$

Учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{a_c}{R}$, получим

$$\frac{1}{2} m_1 a_c = F_{\text{н}} - F_{\text{тр}}. \tag{3.28}$$

Уравнения (3.24), (3.26), (3.28) образуют неполную систему. Дополним её соотношениями между ускорениями: $a = a_c + \varepsilon R$ или с учётом (3.28) получим

$$a = 2a_c. \tag{3.29}$$

Решая совместно систему уравнений (3.24), (3.26), (3.28), (3.29), будем иметь

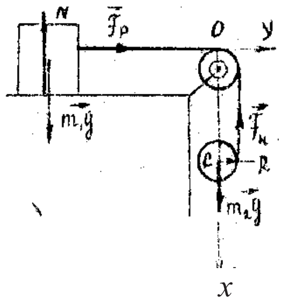
$$a = \frac{g}{1 + \dfrac{3m_1}{8m_2}};\ a_c = \frac{g}{2\left(1 + \dfrac{3m_1}{8m_2}\right)};\ F_{\text{н}} = \frac{3m_1}{8}\left(1 + \frac{3m_1}{8m_2}\right)^{-1} g;\ F_{\text{тр}} = \frac{m_1}{8}\left(1 + \frac{3m_1}{8m_2}\right)^{-1} g.$$

После подстановки численных значений получим

$$a = 8{,}4\,\text{м/с}^2;\ a_c = 4{,}2\,\text{м/с}^2;\ F_{\text{н}} = 31{,}5\,\text{Н};\ F_{\text{тр}} = 10{,}5\,\text{Н}.$$

Задача 11

К одному концу невесомой нерастяжимой нити привязан груз массой $m_1 = 1\,\text{кг}$, который может без трения двигаться по горизонтальной плоскости. Нить перекинута через невесомый блок, и другой её конец намотан на сплошной цилиндр массой $m_2 = 10\,\text{кг}$ и радиусом 10 см (см. рисунок). Определить ускорение движения груза, ускорение центра масс цилиндра, угловое ускорение вращения цилиндра и силу натяжения нити.



Решение

Исходя из условия, физическая система состоит из груза – материальной точки и цилиндра – твёрдого тела. Свяжем ИСО с Землёй и направим оси *OX* и *OY*, как показано на рисунке. Ось *OZ* направим на нас параллельно оси вращения цилиндра. Укажем силы, действующие на тела системы. На груз действуют три силы: взаимно уравновешивающие друг друга сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, а также сила растяжения нити $\vec{F}_р$, причём

$$\left|\vec{F}_р\right| = \left|\vec{F}_н\right| = F_н . \tag{3.30}$$

На цилиндр действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_н$. С учётом этого запишем уравнения движения тел системы. Для груза – это уравнение второго закона Ньютона:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_р + m_1\vec{g} + \vec{N} , \tag{3.31}$$

для цилиндра – уравнение движения центра масс:

$$m_2\vec{a}_c = m_2\vec{g} + \vec{F}_н \tag{3.32}$$

и основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} . \tag{3.33}$$

Проецируя уравнение (3.31) на ось *OY*, с учётом (3.30) получим

$$m_1a_1 = F_н . \tag{3.34}$$

Проецируя уравнение (3.32) на ось *OX*, будем иметь

$$m_2a_c = m_2g - F_н . \tag{3.35}$$

Наконец, проецируя уравнение (3.33) на ось *OZ*, получим

$$\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = F_нR . \tag{3.36}$$

Учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, уравнение (3.36) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}m_2a_1 = F_н . \tag{3.37}$$

Полученная система уравнений (3.34), (3.35), (3.37) является неполной. Дополним её соотношением между ускорениями:

$$a_c = a_1 + \varepsilon R. \tag{3.38}$$

Решая совместно систему уравнений (3.34), (3.35), (3.37), (3.38), находим:

$$a_c = \frac{2 + \dfrac{m_2}{m_1}}{3 + \dfrac{m_2}{m_1}} g; \; a_1 = \frac{\dfrac{m_2}{m_1}}{3 + \dfrac{m_2}{m_1}} g; \; F_{\text{н}} = \frac{m_2}{3 + \dfrac{m_2}{m_1}} g; \; \varepsilon = \frac{2 + \dfrac{m_2}{m_1}}{R\left(3 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)} g .$$

Подставляя численные значения, получим

$$a_c = 9{,}1\,\text{м/с}^2;\; a_1 = 7{,}5\,\text{м/с}^2;\; F_{\text{н}} = 7{,}5\,\text{Н};\; \varepsilon = 15{,}1\,\text{рад/с}^2 .$$

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

4.1. Основные понятия и соотношения

Прежде всего, приведём определения основных понятий, используемых при формулировке законов сохранения.

Система тел – это совокупность нескольких тел (частиц). Число частиц в системе может быть любым (в том числе и одна). Твёрдое тело может рассматриваться как система бесконечно большого числа материальных точек.

Состояние системы. Оно определяется одновременным заданием положений (координат) и скоростей всех её частиц. Изменение координат или скоростей частиц переводит систему в новое состояние.

Внешние и внутренние силы. Силы взаимодействия между частицами, принадлежащими к данной системе, называются внутренними, а силы, обусловленные действием других тел на тела системы, – внешними. В не-инерциальных системах отсчёта к внешним относятся и силы инерции.

Замкнутая система тел. Это такая система, на которую не действуют внешние силы (или их воздействием можно пренебречь).

Работа и кинетическая энергия. Математические выражения, определяющие понятия работы и кинетической энергии для случая движения материальной точки, а также поступательного и вращательного движений твёрдого тела, приведены в табл. 4.1. Там же для удобства приведены и математические соотношения, определяющие введённые нами ранее понятия импульса и момента импульса материальной точки и твёрдого тела.

Таблица 4.1

Физическая величина	Модель движущегося тела		
	материальная точка (m – масса; $\vec{v}$ – скорость; $\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий её положение)	твёрдое тело (движется поступательно, m – масса; $\vec{v}_c$ – скорость движения центра масс)	твёрдое тело (вращается вокруг неподвижной оси; I – момент инерции; $\vec{\omega}$ – угловая скорость; φ – угол поворота)
Работа	$A_{12} = \int_1^2 F_s ds$, если $F_s = \text{const}$, то $A_{12} = F_s \cdot s_{12}$	$A_{12} = \int_1^2 F_s ds$, если $F_s = \text{const}$, то $A_{12} = F_s \cdot s_{12}$	$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$, если $M_z = \text{const}$, то $A_{12} = M_z \varphi_{12}$
Кинетическая энергия	$E_к = \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$	$E_к = \dfrac{mv_c^2}{2}$	$E_к = \dfrac{I\omega^2}{2}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p}_c = m\vec{v}_c$	
Момент импульса	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$		$L_z = I\omega_z$

ds – модуль перемещения $d\vec{s}$.

Консервативные и неконсервативные силы. Силы, работа которых зависит от начальной и конечной точек траектории, но не зависит от её вида, называются консервативными. Это определение следует из рассмотрения поведения одной частицы в поле сил.

Анализ поведения системы частиц, между которыми действуют одни лишь центральные силы, зависящие при данном характере взаимодействия только от расстояния между частицами и направленные по прямой, проходящей через эти частицы, позволяет дать более общее определение консервативных сил: *консервативными* называются силы, зависящие только от конфигурации системы и суммарная работа которых не зависит от «пути» перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

Силы, не удовлетворяющие этим определениям, называются неконсервативными.

Примером сил первого вида могут служить силы тяготения, второго – диссипативные, т. е. силы трения и сопротивления.

Потенциальная энергия частицы U. Это та энергия, которой обладает неподвижная частица, находясь в поле консервативных сил. Абсолютное значение потенциальной энергии зависит лишь от положения частицы в пространстве и определяется с точностью до прибавления некоторой постоянной, значение которой в большинстве задач, рассматривающих движение частиц в поле сил тяжести, принимается равным нулю на поверхности Земли. Убыль потенциальной энергии при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 равна работе сил поля на пути 1–2:

$$U_1 - U_2 = A_{12}. \qquad (4.1)$$

Собственная потенциальная энергия системы частиц, между которыми действуют только центральные силы $U_{соб}$. Это энергия, величина которой определяется лишь конфигурацией системы. Работа всех внутренних сил (консервативных) при изменении конфигурации равна убыли собственной потенциальной энергии системы:

$$U_{1_{\text{соб}}} - U_{2_{\text{соб}}} = A_{12_{\text{внутр}}} . \qquad (4.2)$$

Численное значение собственной потенциальной энергии можно найти из соотношения

$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2}\sum U_i , \qquad (4.3)$$

где U_i – потенциальная энергия взаимодействия i-частицы со всеми остальными частицами системы.

«Внешняя» потенциальная энергия системы частиц. Если система находится во внешнем поле консервативных сил, то каждая частица характеризуется своим значением потенциальной энергии в данном поле, а вся система может быть охарактеризована величиной

$$U_{\text{внеш}} = \sum U_i . \qquad (4.4)$$

Эта величина и называется «внешней» потенциальной энергией системы.

Используя введённые понятия, запишем уравнения, определяющие изменения полной механической энергии, импульса и момента импульса системы частиц:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дис}}; \qquad (4.5)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}; \qquad (4.6)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} . \qquad (4.7)$$

В (4.5) $E = E_{\text{к}} + U_{\text{соб}}$ – полная механическая энергия системы; $E_{\text{к}} = \sum E_{\text{к}_i}$ – суммарная кинетическая энергия частиц системы; $A_{\text{внеш}}$ – суммарная работа всех внешних сил, действующих на систему; $A_{\text{внутр}}^{\text{дис}}$ – суммарная работа всех внутренних диссипативных сил в системе – величина всегда отрицательная. В (4.6) и (4.7) $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$; $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ – соответственно суммарные импульс и момент импульса системы; $\vec{F}_{\text{внеш}}$ и $\vec{M}_{\text{внеш}}$ – соответственно результирующая всех внешних сил и суммарный момент внешних сил.

Из уравнений (4.5) – (4.7) непосредственно следуют законы сохранения соответствующих величин. Действительно, для замкнутой системы частиц, в которой нет диссипативных сил, правые части этих уравнений равны нулю и могут быть переписаны в виде:

$$E = E_{\text{к}} + U = \text{const}; \tag{4.8}$$

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \text{const}; \tag{4.9}$$

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \text{const}. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.8) – (4.10) и выражают соответственно законы сохранения механической энергии, суммарного импульса и момента импульса указанной системы частиц.

4.2. Рекомендации по применению законов сохранения и алгоритм решения с их помощью динамических задач

Уравнения (4.6) – (5.0) могут применяться для решения динамических задач как при известных силах, так и в тех случаях, когда силы неизвестны вообще. В первом случае эти уравнения часто позволяют получить решение значительно более простым и изящным путём, чем при решении задач с помощью уравнения движения (второй закон Ньютона). Во втором – их применение вообще является единственным путём решения. Оба типа задач могут быть решены с помощью алгоритмического предписания:

1. Выполнить рисунок и установить, какие тела входят в рассматриваемую систему тел.

2. Выбрать инерциальную или неинерциальную систему отсчёта.

3. Установить, сколько состояний рассматривается в задаче и какие силы действуют на каждое тело системы при переходе системы из одного состояние в другое.

4. Произвести анализ сил, выделив внешние и внутренние, консервативные и диссипативные.

5. Установить замкнутость рассматриваемой системы, т.е. проверить выполнение условий $\sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0, \sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = 0, \sum_{i=1}^{n} F_{i_z} = 0.$

6. В зависимости от того, замкнута система или нет и какие величины (механическая энергия, импульс или момент импульса системы) в рассматриваемых состояниях известны, записать законы сохранения или изменения заданных величин.

7. Закон сохранения или изменения векторных величин спроецировать на выбранное направление.

8. Выразить величины, входящие в полученные уравнения, через данные условия задачи и величины, которые нужно определить.

9. Решая полученную систему уравнений, определить искомые величины.

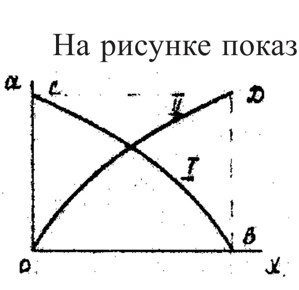
10. Проанализировать полученный результат.

Естественно, что если силы в задаче неизвестны, то пункты, связанные с расстановкой и анализом сил, не выполняются.

4.3. Примеры решения задач

Задача 19

На рисунке показаны графики зависимости ускорения a от координаты x для прямолинейных движений двух точек с равными массами. Сравнить работы сил, действующих на материальные точки, на участке OB в случаях I и II.

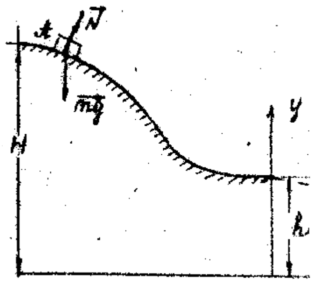


Решение

Поскольку сила и ускорение связаны между собой вторым законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, а массы тел одинаковы, графики зависимости сил от координаты будут иметь тот же вид, что и графики ускорений. Работа, когда сила переменна, вычисляется по соотношению $A = \int_0^B F_x dx$ и в данном случае численно равна площади фигуры, ограниченной кривой *a* (*x*) и вертикальными прямыми *OC* и *ВД*. Так как эти площади равны, то приходим к выводу, что работы сил при перемещениях I и II одинаковы.

Задача 20

Небольшая шайба *A* соскальзывает без трения с начальной скоростью, равной нулю, с вершины горки высотой *H*, имеющей горизонтальный трамплин (см. рисунок). При какой высоте трамплина *h* шайба пролетит наибольшее расстояние *s?* Чему оно равно?



Решение

Физическая система состоит из шайбы и Земли. Будем считать шайбу материальной точкой. Свяжем ИСО с Землёй и направим оси так, как это показано на рисунке. Из условия задачи следует, что до отрыва с трамплина на шайбу действуют сила реакции опоры и сила тяжести, после отрыва – сила тяжести. Сила тяжести консервативна, поэтому в момент отрыва

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - h),$$

откуда

$$v = \sqrt{2g(H - h)}. \tag{4.11}$$

После отрыва шайба будет двигаться вдоль оси OX равномерно и прямолинейно, поэтому $x = vt$, а по оси y – равноускоренно, поэтому

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{4.12}$$

В момент приземления $x = s$, а $y = 0$. Тогда

$$\begin{cases} s = vt \\ h = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \tag{4.13}$$

Решая совместно (4.11) и (4.13), получим

$$s = 2\sqrt{h(H-h)}. \tag{4.14}$$

Высоту трамплина h определим из условия максимума функции $s(h)$, т.е.

$$\frac{ds}{dh} = \frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}} = 0, \tag{4.15}$$

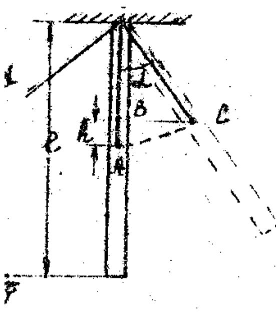
откуда

$$h = \frac{H}{2}. \tag{4.16}$$

Подставляя (4.16) в (4.14), получим $s_{\max} = H$.

Задача 21

Деревянный стержень массой $m_1 = 6$ кг и длиной $\ell = 2$ м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O (см. рисунок).



В конец стержня попадает пуля массой $m_2 = 10$ г, летевшая со скоростью $v = 10^3$ м/с, направленной перпендикулярно стержню, и застревает в нём. Определить кинетическую энергию стержня после удара и максимальный угол α, на который отклонится от вертикали стержень после удара.

Решение

Физическую систему образуют пуля и стержень. Примем пулю за материальную точку, стержень – за твёрдое тело. В задаче рассматриваются два состояния: до и после взаимодействия. При этом характер сил, возникающих при взаимодействии, неизвестен. Поэтому решить задачу динамическим методом невозможно. Применим закон сохранения момента импульса относительно оси вращения. ИСО свяжем с Землёй, начало координат поместим в точку *O*, а ось вращения примем за ось *OX*. Момент импульса пули относительно оси вращения до удара равен $m_2 v \ell$, а стержня – нулю. После удара момент импульса стержня и пули равен $I\omega$, где I – момент инерции стержня и пули относительно оси вращения, а ω – угловая скорость вращения стержня и пули после удара. Так как момент инерции пули $m_2 \ell^2$ много меньше момента инерции стержня, то им можно пренебречь и считать, что $I = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$. По закону сохранения момента импульса

$$m_2 v \ell = I\omega . \tag{4.17}$$

Кинетическая энергия стержня с учётом (4.17)

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m_2^2 v^2 \ell^2}{2I} = \frac{3m_2^2 v^2}{2m_1} . \tag{4.18}$$

Подставив в (4.18) численные значения, будем иметь $E_к = 25\,Дж$. Заметим, что начальная кинетическая энергия пули (до удара) $E_{к_0} = \frac{m_2 v^2}{2} = 5 \cdot 10^3\,Дж$, что значительно больше кинетической энергии стержня после удара. Отсюда следует, что большая часть начальной механической энергии превратилась во внутреннюю. Поэтому было бы неправильно при определении $E_к$ применять закон сохранения механической энергии. Так же неправильно было бы применять в задаче и закон сохранения импульса, ибо после удара стержень и пуля участвуют во вращательном движении.

Определим максимальный угол α. После удара неконсервативных сил в системе нет и, следовательно, к дальнейшему процессу движения стержня и пули можно применить закон сохранения энергии в механике. По этому закону

$$\frac{3m_2^2 v^2}{2m_1} = m_1 g h , \qquad (4.19)$$

где h – высота, на которую поднялся центр масс стержня, находящийся в точке A, после удара. В формуле (4.19) учтено, что $m_2 << m_1$. Из треугольника OBC получим

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\ell}{2} - h}{\frac{\ell}{2}} . \qquad (4.20)$$

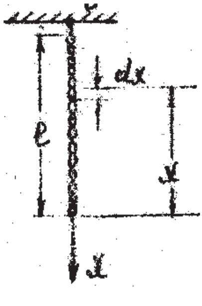
Решая совместно (4.19) и (4.20), будем иметь

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{3m_2^2 v^2}{m_1^2 g \ell}\right). \qquad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) численные значения, получим $\alpha = 54^\circ$.

Задача 22

Цепь массой $m = 1\,\text{кг}$ и длиной $\ell = 1{,}4\,\text{м}$ висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом (см. рисунок). После пережигания нити цепь упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.



Решение

Свяжем ИСО с Землёй и выберем одномерную систему координат с началом в точке подвеса цепи. Разобъём мысленно цепь на элементарные участки длиной dx и массой dm. Считая цепь однородным телом, для массы, приходящейся на единицу длины, получим $\tau = \dfrac{m}{\ell}$. Тогда масса элемента dx будет

$$dm = \tau dx = \frac{m}{\ell} dx . \qquad (4.22)$$

После пережигания нити физическая система стол – цепь становится незамкнутой вдоль оси OX. Поэтому полученный столом импульс равняется изменению импульса цепи.

Каждый элемент цепи при падении передаёт столу импульс

$$dp = v \cdot dm , \qquad (4.23)$$

где v – скорость, приобретаемая элементом за время падения с высоты x. Так как цепь падает свободно, то

$$v = \sqrt{2gx} . \qquad (4.24)$$

Подставляя (4.22) и (4.24) в (4.23), получим

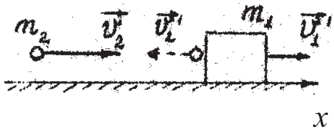
$$dp = \frac{m}{\ell}\sqrt{2g} \cdot dx . \qquad (4.25)$$

Интегрируя (4.25) в пределах от 0 до ℓ, найдём полный импульс, переданный столу:

$$p = \frac{m}{\ell}\sqrt{2g}\int_0^{\ell} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} m\sqrt{2g\ell} .$$

Задача 23

В стальной кубик массой $m_1 = 1\,\text{кг}$, находившийся в покое на горизонтальной поверхности, попадает стальной шарик массой $m_2 = 10^{-2}\,\text{кг}$, летевший горизонтально со скоростью $v = 10^3\,\text{м/с}$, и упруго отражается обратно. Определить, какой путь после удара пройдёт кубик до остановки, если коэффициент трения между кубиком и горизонтальной поверхностью $\mu = 0,2$.



Решение

1. Физическая система состоит из шарика и кубика, которые можно принять за материальные точки. Инерциальную систему свяжем с Землёй и ось *OX* направим, как показано на рисунке. Начальное состояние системы (до взаимодействия) известно. Так как силы, возникающие в процессе взаимодействия шарика и кубика, неизвестны, то описать этот процесс динамическим методом невозможно.

Применим законы сохранения импульса и энергии. Импульс системы до взаимодействия $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Импульс системы после взаимодействия $\vec{p}' = m_2\vec{v}_2' + m_1\vec{v}_1'$, где $\vec{v}_2'$ и $\vec{v}_1'$ – векторы скорости шарика и кубика соответственно после взаимодействия. По закону сохранения импульса

$$m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2' + m_1\vec{v}_1'. \tag{4.26}$$

Проецируя это векторное уравнение на ось *OX*, получаем

$$m_2 v_2 = -m_2 v_2' + m_1 v_1'. \tag{4.27}$$

По закону сохранения энергии в механике

$$m_2\frac{v_2^2}{2} = m_2\frac{v_2'^2}{2} + m_1\frac{v_1'^2}{2}. \tag{4.28}$$

Учитывая, что $m_2 << m_1$, после решения системы уравнений (4.27) и (4.28) находим $v_2 = v_2'$; $v_1' = 2\dfrac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{2m_2 v_2}{m_1}$.

2. Рассмотрим дальнейшее движение кубика. Физическая система состоит из кубика и Земли.

Так как в системе действует неконсервативная сила трения $F_{тр} = \mu m_1 g$, то, используя соотношение (4.5), находим

$$\frac{m_1 v_2'^2}{2} = \mu m_1 g \cdot s_1. \tag{4.29}$$

Отсюда получаем результат:

$$s_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} = \frac{2m_2^2 v_2^2}{\mu g m_1^2};\ s_1 = 100\text{ м}. \tag{4.30}$$

Данную часть задачи можно решить и динамическим методом. Физическое явление заключается в замедленном движении кубика в результате его взаимодействия с Землёй. Известно начальное положение системы. Необходимо определить один из параметров этого движения (путь до остановки). Применяя второй закон Ньютона $m_1 a = \mu m_2 g$, находим ускорение. Решая обратную задачу кинематики, определяем путь, пройденный кубиком до остановки:

$$s_1 = \frac{v_1'^2}{2} = \frac{2m_2^2 v_2^2}{\mu g m_1^2}; \; s_1 = 100 \text{ м}. \qquad (4.31)$$

Как видим, результат (4.30), полученный с помощью закона сохранения энергии в механике, совпадает с (4.31), полученным динамическим методом.

3. Изменим несколько условия задачи. Будем считать кубик неупругим телом, остальные условия сохраним прежними.

Процесс взаимодействия (абсолютно неупругий удар) описывается законом сохранения импульса:

$$m_2 v_2 = \left(m_2 + m_1\right) \cdot U'. \qquad (4.32)$$

Из (4.32) определим начальную скорость кубика (с учётом $m_2 << m_1$):

$$U' = \frac{m_2 v_2}{m_1}. \qquad (4.33)$$

Решая динамическую задачу дальнейшего движения кубика (любым методом), находим его путь до остановки

$$s_2 = \frac{U'^2}{2\mu g} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2\mu g m_1^2}; \; s_2 = 25 \text{ м}. \qquad (4.34)$$

Из уравнений (4.30), (4.31) и (4.34) видно, что в случае абсолютно упругого удара кубик до остановки проходит путь в 4 раза больший, чем при абсолютно неупругом взаимодействии.

4. Изменим ещё условия задачи. Пусть в результате взаимодействия шарик, пройдя через кубик, продолжает движение в том же направлении со скоростью $v_2'' = 500\,\text{м/с}$, остальные условия те же.

Применив закон сохранения импульса

$$m_2 v_2 = m_2 v_2'' + m_1 U_1'', \qquad (4.35)$$

находим начальную скорость кубика:

$$U_1'' = \frac{m_2\left(v_2 - v_2''\right)}{m_1}. \qquad (4.36)$$

Путь кубика до остановки

$$s_3 = \frac{U_1''^2}{2\mu g} = \frac{m_2^2\left(v_2 - v_2''\right)^2}{2\mu g m_1^2};\; s_3 = 6,25\,\text{м}. \qquad (4.37)$$

Таким образом, в случае абсолютно упругого удара (при условии $m_2 << m_1$) и скорость v_1', и путь s_1, пройденный кубиком до остановки, являются максимальными.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сена Л. А*. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высшая школа, 1986.

2. *Савельев И. В*. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982.

3. *Иродов И. Е*. Сборник задач по общей физике / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. – М.: Наука, 1975.

4. *Сборник* задач по физике / под ред. *С. М. Козела*. – М.: Наука, 1983.

5. *Беликов Б. С*. Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высшая школа, 1986.

6. *Методические* указания к решению задач по механике (кинематика и динамика). – Кишинёв: Изд-во КПИ, 1982.

7. *Учись* решать задачи. Кинематика: метод. указания по курсу общей физики. – Иркутск: Политехн. ин-т, 1984.

8. *Применение* законов динамики: метод. указания в курсе общей физики. – Иркутск: Политехн. ин-т, 1983.

9. *Баринова М. Ф*. Задачи и упражнения по классической механике /М.Ф. Баринова, О. В. Голубева. – М.: Высшая школа, 1980.

10. *Пойа Д*. Как решить задачу. – М.: Наука, 1959.

11. *Пинский А. А*. Задачи по физике. – М.: Наука, 1977.

12. *Сборник* задач по общему курсу физики. Механика / под ред. И. А. Яковлева. – М.: Наука, 1977.

13. *Иродов И. Е*. Основные законы механики. – М.: Высшая школа, 1985.

14. *Матвеев А. Н*. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1986.

15. *Учись* решать задачи. Законы сохранения и изменения энергии, импульса, момента импульса: метод. указания по курсу общей физики – Иркутск: Политехн. ин-т, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители:
Чечуев Владимир Яковлевич
Викулов Станислав Викторович
Селиванова Эмма Борисовна
Дзю Искра Михайловна
Минаев Александр Павлович

РЕПЕТИТОР ПО ФИЗИКЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Редактор *Н. К. Крупина*
Компьютерная верстка *В. Н. Зенина*

Подписано в печать 4 июня 2015 г. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Объем 4,2 уч.-изд. л., 5,2 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Изд. № 35. Заказ № 1352.

Отпечатано в Издательском центре НГАУ «Золотой колос»
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб. 106.
Тел. (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru