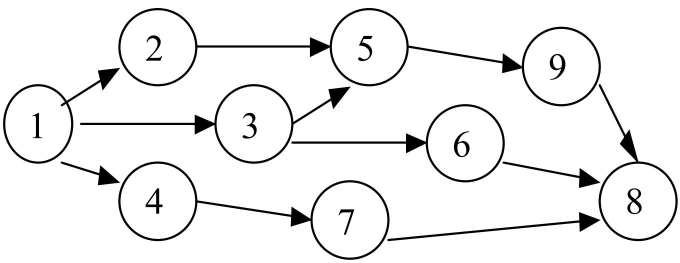
В.Н. БАБИН, М.В. ГРУНИНА,

А.Д.ДЕМЕНТЬЕВ, В.Г. ШЕФЕЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Новосибирск 2015

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших сельскохозяйственных учебных заведений по агроинженерным и агроэкономическим специальностям

2-е издание, стереотипное

Новосибирск 2015

УДК 519.6
ББК 22.18
Б - 125

Авторы: доц. В.Н. Бабин, доц. М.В. Грунина, д-р физ.-мат. наук А.Д.Дементьев, доц. В.Г. Шефель

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Л.А.Назаров
д-р физ.-мат. наук Л.А.Назарова

Математическое моделирование: учебное пособие и индивидуальные задания/ Новосиб. гос. аграр. ун-т; авт: В.Н.Бабин, М.В.Грунина, А.Д.Дементьев, В.Г.Шефель. – 2-е изд., стер.– Новосибирск, 2015. – 188 с.

Учебное пособие содержит основные теоретические сведения по математическому моделированию. Приведены основные методы решения задач линейного программирования и динамических задач. Содержит примеры типовых задач по основным разделам курса. Приведены задачи для контрольных работ.

Предназначено для студентов очной и заочной формы обучения высших технических специальностей по направлениям подготовки: бакалавриат: 35.03.06 – Агроинженерия, 23.03.03 – Эксплуатация траспортно-технологических машин и комплексов, 23.03.01 – Технология транспортных процессов, 44.03.04 – Профессиональное обучение, 20.03.01 – Техносферная безопасность; магистратура: 35.04.06 – Агроинженерия, 44.04.04 – Профессиональное обучение, 23.04.03 – Эксплуатация траспортно-технологических машин и комплексов, а также для аспирантов и научных сотрудников, использующих математическое моделирование.

ISBN 5-94477-023-6

Введение

Такие экономические проблемы, как закономерности ценообразования, изучение полных затрат труда и материалов на единицу продукции, исследование межотраслевых связей, определение рентабельности капиталовложений, определение эффективного размещения производительных сил, оптимальное планирование производственного процесса, эффективное использование ограниченных ресурсов, рациональная организация технологического процесса, обоснование нормативов материальных ресурсов и оборотных средств, календарное и производственное планирование, и многие другие не менее важные проблемы могут успешно решаться при широком привлечении математических методов исследования.

В основе экономико-математических исследований лежит *математическое моделирование* изучаемого экономического процесса, т.е. описание количественных закономерностей этого процесса с помощью математических выражений. *Математическая модель* является абстрактным отображением реального процесса и в меру своей абстрактности может его характеризовать более или менее точно.

Обычно экономические процессы чрезвычайно многообразны, в них участвуют многие различные взаимосвязанные факторы. Чем больше этих факторов будет включено в модель, тем точнее она отобразит реальную действительность. Однако ни одна модель не может отразить всего многообразия действительного процесса. Кроме того, при составлении модели стремятся построить ее как можно более доступной для дальнейших исследований. Лишь тщательный экономический анализ влияния различных факторов и их сопоставление, выделение главных, определяющих связей и отбрасывание второстепенных позволяют разрешить это противоречие и составить модель, с одной стороны, достаточно полно отражающую моделируемое явление и, с другой стороны, возможно более простую для математического изучения. В результате качественного экономического анализа должна быть также правильно сформулирована цель исследования, определены основные методологические позиции построения модели и ее изучения. Наконец, результаты исследования также должны быть экономически проанализированы, после чего могут быть сделаны окончательные выводы.

Таким образом, математические методы исследования экономики должны быть неразрывно связаны и правильно сочетаться с экономическим анализом существа изучаемого процесса.

Составленная математическая модель становится самостоятельным объектом изучения математическими средствами. При этом результаты исследования не зависят от конкретного содержания моделируемого процесса, определяются лишь математической формой модели и приложимы ко всем реальным процессам, которые могут быть описаны подобной же моделью. В этом одно из преимуществ математических методов, их «универсальный» характер.

ГЛАВА 1

§ 1. Сущность процесса моделирования

Развитие науки тесно связано с построением и использованием разнообразных моделей. Под моделью понимается некоторый вспомогательный объект (материальный или идеальный), который используется в процессе исследования объекта оригинала.

Моделирование – это изучение объектов с помощью их моделей. Моделирование является способом отражения действительности и служит инструментом ее познания. Необходимость использования метода моделирования вызывается тем, что некоторые объекты или явления исследовать непосредственно либо вовсе нельзя, либо это приводит к большим затратам времени и ресурсов.

Замена объекта исследования некоторой моделью сразу же приводит к проблеме адекватности отображения и, следовательно, возможности использования на практике научных результатов на модельном уровне. Поэтому процесс моделирования включает в себя этап многостороннего анализа полученных новых знаний, сверку их со сложившимися представлениями. В случае расхождения и терзаний смутными сомнениями проводится уточнение и корректировка модели.

Таким образом, моделирование является многошаговым процессом, в котором эксперименты с моделью и ее модификациями могут многократно повторяться с целью получения приемлемых выводов и результатов, но т.к. модели всегда выбираются значительно проще самих объектов, то процесс моделирования оправдывает себя.

Так как моделирование – итеративный процесс, то с каждым шагом адекватность модели повышается благодаря накапливаемым в результате проводимых экспериментов знаниям, и выводы об объекте-оригинале от шага к шагу уточняются и становятся более реалистичными.

По средствам моделирования модели могут быть материальными и идеальными. Моделирование называется материальным в том случае, когда исследование ведется на моделях, связь которых с объектами имеет материальную основу. Разновидностями материального моделирования являются, например, физическое и аналоговое моделирование. Примером физического моделирования могут служить эксперименты с моделями в аэродинамической трубе. Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими уравнениями. Например, можно изучать механические колебания с помощью электрических систем, описываемых теми же дифференциальными уравнениями. Так как эксперименты с электрической системой в этом случае проще, то она и используется вместо механической.

Идеальное моделирование основывается на мысленных связях между моделью и объектом. В действительности же трудно отделить материальные и идеальные модели в любом процессе моделирования или хотя бы провести четкую границу между ними, если процесс моделирования рассматривать как процесс взаимодействия исследователя (субъекта) с объектом моделирования, с его способностями проведения экспериментов, мышления и обобщения.

§ 2.Основные этапы математического моделирования

2.1. Содержательная постановка проблемы

Главное на этом этапе – четко сформулировать суть проблемы, принимаемые предпосылки и те вопросы, которые необходимо осветить. Этот этап включает описание объекта или ситуации, выделение существенных элементов и факторов, формулирование гипотезы, целей и задач исследования. Это далеко не тривиальный этап, имеющий первостепенное значение. Как уже отмечалось, моделирование – итеративный процесс, поэтому проблема ставится в довольно расплывчатом виде, а затем, по мере получения новых знаний об объекте, в том числе и на основе его математической модели, уточняется и детализируется.

2.2. Построение математической модели

На этом этапе записываются в виде математических формул (функций, неравенств, уравнений и т.д.) соотношения между выделенными факторами, влияющие на решение проблемы. При этом эти зависимости должны удовлетворять сформулированным гипотезам и известным свойствам исследуемого процесса. Сложность модели должна быть таковой, чтобы она поддавалась анализу и численному расчету и могла бы быть информационно обеспечена. Поэтому на этом этапе возможны некоторые упрощения ситуации. Необходимо заботиться о том, чтобы эффект от дополнительной информации был большим по сравнению с затратами на ее получение. Поэтому в самом начале построения модели следует посмотреть, а нельзя ли воспользоваться некоторой готовой (хорошо изученной) моделью. Чтобы корректно построить модель, необходимо участие как специалиста, хорошо знающего объект, так и математика, имеющего опыт формализации различных зависимостей и связей между элементами сложных систем.

2.3. Математический анализ и численный расчет моделей

На этом этапе с помощью сложных математических рассуждений и доказательств исследуются свойства решений построенной модели, вопросы о существовании требуемых решений. Если выясняется, что все решения неприемлемы по какой-то причине, то вносятся коррективы в постановку и описание проблемы, могут быть изменены исходные посылки с тем, чтобы избавиться от обнаруженного аналитическим путем нежелательного эффекта.

Знание качественных закономерностей, вытекающих из моделей, углубляет наши знания об объекте, поясняет суть взаимодействующих факторов, приводящих к этим закономерностям. Поэтому исследователь намеренно на стадии математического анализа упрощает модель с целью новых качественных выводов о поведении объекта в несколько упрощенных ситуациях.

Для проведения численных расчетов модели необходима разработка алгоритма и компьютерной программы, реализующей этот алгоритм. Здесь имеются специфические трудности, преодоление которых требует привлечения высококвалифицированных математиков и программистов. Численные расчеты приводят к результатам, которые не удается получить аналитическим путем, так как они более конкретно (на числовом уровне) отражают исследуемый объект. После проведения численных расчетов проводится всесторонний их анализ с целью получения качественных выводов и важных числовых характеристик о поведении изучаемого объекта. Как правило, при моделировании остаются неотраженными некоторые аспекты проблемы, что приводит к необходимости дополнительного анализа результатов, проверки их на адекватность реальным условиям. Проведение неформального анализа позволяет обнаружить недостатки модели или использованной информации.

§ 3. Формулировка задачи линейного программирования

Основным предметом изучения в настоящем параграфе является определенный класс математических задач на максимум или минимум функций, получивших название *задач линейного программирования.*

3.1. Задача определения оптимального ассортимента продукции

Предприятие может производить два вида изделий (№1 и №2), располагая для их изготовления ограниченными ресурсами материалов (чугуна и стали соответственно в количествах 1650 и 1200 кг) и оборудования (в количестве 2060 станко-часов). Табл.1 характеризует затраты каждого вида ресурсов на изготовление одного изделия № 1 и 2. В последней строке таблицы указана прибыль, которую получает предприятие от выпуска единицы каждого изделия.

Таблица 1

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Затраты на 1 изделие	
		№1	№2
Чугун	1650 кг	10	30
Сталь	1200 кг	10	20
Оборудование	2060 ст.-ч	23	18
Прибыль тыс. р.		34	40

Требуется определить, сколько изделий №1 и №2 должно производить предприятие, чтобы достичь наибольшей прибыли, при условии, что изделий №1 должно быть изготовлено не менее 20 и изделий №2 – не менее 15 единиц.

Для решения задачи прежде всего необходимо составить ее математическую модель, т.е. выразить условия задачи в математической форме. Для этого введем искомые неизвестные x_1 и x_2, обозначающие число изделий №1 и №2, которые должно производить предприятие.

Неизвестные x_1 и x_2 должны прежде всего удовлетворять следующим трем неравенствам:

$$10x_1 + 30x_2 \le 1650,$$

$$10x_1 + 20x_2 \le 1200, \qquad (1)$$

$$23x_1 + 18x_2 \le 2060,$$

каждое из которых выражает условие, что расход данного ресурса (например, для чугуна $10x_1 + 30x_2$) не может превышать общего количества (т.е. 1650 кг), которым располагает предприятие. Назовем приведенные неравенства ограничительными условиями по ресурсам. Кроме того, неизвестные x_1 и x_2 связаны ограничениями по ассортименту, которые, согласно условию задачи, выразятся в виде неравенств

$x_1 \geq 20$ и $x_2 \geq 15$ (2)

Наконец, из существа задачи ясно, что x_1 и x_2 могут принимать лишь неотрицательные значения, т.е.

$x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ (3)

Системы неравенств (1) – (3) выражают все ограничительные условия, налагаемые на x_1 и x_2.

Любая пара значений x_1 и x_2, удовлетворяющая системе неравенств (1) – (3), будет определять один из допустимых вариантов плана предприятия по выпуску данных изделий.

Таких допустимых вариантов будет бесчисленное множество.

Даже если учесть условие целочисленности значений x_1 и x_2, то и в этом случае различных допустимых вариантов плана будет хотя и не бесконечное множество, но достаточно большое число.

Согласно условию задачи, необходимо выбрать такой вариант плана, для которого суммарная прибыль, получаемая предприятием, окажется наибольшей. Этот вариант плана назовем оптимальным.

Прибыль предприятия, которую мы обозначим через z, будет определяться из следующего равенства:

$$z = 34x_1 + 40x_2 \quad (4)$$

Теперь можно сформулировать задачу математически, т.е. описать ее с помощью математической модели.

Среди множества решений системы неравенств

$$10x_1 + 30x_2 \le 1650,$$

$$10x_1 + 20x_2 \le 1200, \quad (1)$$

$$23x_1 + 18x_2 \le 2060,$$

$$x_1 \ge 20;\ x_2 \ge 15; \quad (2)$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \quad (3)$$

найти такое решение (т.е. такую пару значений x_1 и x_2), для которого функция

$$z = 34x_1 + 40x_2 \quad (4)$$

достигает наибольшего значения.

Решив задачу (1) – (4) методами, о которых будет идти речь в дальнейшем, найдем оптимальный план: $x_1 = 70$ и $x_2 = 25$. При этом предприятие получит наибольшую прибыль: $z_{наиб} = 3380$ тыс. р.

3.2. Задача о диете

Для кормления крупного рогатого скота необходимо создать диету (дневной рацион), пользуясь набором из трех видов кормов: сена, силоса и концентратов, ресурсы которых ограничены соответственно числами 20, 25 и 10 кг в расчете на один рацион. Требуется, чтобы этот дневной рацион содержал необходимое количество кормовых единиц (не менее 20), белка (не менее 2000 г) и кальция (не менее 100 г) и при этом оказался бы наиболее выгодным по себестоимости.

Табл.2 характеризует содержание кормовых единиц белка и кальция в одном килограмме каждого вида корма и себестоимости кормов.

Таблица 2

Вид кормов	Содержание в 1 кг			Себестоимость 1 кг корма, р
	корм.ед.	белка, г	кальция, г	
Сено	0,5	40	5	2
Силос	0,2	10	4	1
Концентрат	1,0	200	3	4

Для составления математической модели обозначим через x_1, x_2 и x_3 соответственно количество килограммов сена, силоса и концентратов, которые составляют искомый рацион. Тогда на основании условий задачи x_1, x_2 и x_3 должны удовлетворять следующим ограничительным условиям:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 \geq 20, \\ 40x_1 + 10x_2 + 200x_3 \geq 2000, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 100, \end{cases} \tag{5}$$

$x_1 \leq 20; x_2 \leq 25; x_3 \leq 10$ (6)

Кроме того, как и в предыдущей задаче, x_1, x_2 и x_3 должны быть неотрицательными, т.е.

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$ (7)

Очевидно, существует бесчисленное множество решений системы неравенств (5) – (7), а это значит, что существует бесчисленное множество допустимых по условиям задачи рационов кормления. Среди них нужно выбрать рацион, обладающий наименьшей себестоимостью.

Обозначив через z суммарную себестоимость дневного рациона, получим

$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$ (8)

Теперь можно сформулировать задачу следующим образом: *найти совокупность значений* x_1, x_2 и x_3, *которые удовлетворяли бы неравенствам (5) – (7) и для которых функция (8) достигала бы наименьшего значения.*

Таким образом, опять получена линейная математическая модель, заданная выражениями (5) – (8).

Оптимальным в данной задаче оказывается рацион следующего состава: $x_1 = 20$ кг, $x_2 = 0$ и $x_3 = 10$ кг. При этом его себестоимость будет $z_{наим} = 80$ руб.

3.3. Транспортная задача

Необходимо перебазировать имеющиеся в пунктах A и B соответственно 6 и 4 машины в пункты назначения C (3 машины) и D (7 машин). В табл.3 приведены расстояния в километрах между каждым из пунктов отправления и назначения. Требуется спланировать перевозки так, чтобы суммарный пробег в машино-километрах оказался наименьшим.

Таблица 3

	C	D
A	80	30
B	60	90

Для составления математической модели данной задачи обозначим число машин, перегоняемых из A в C, через x_1, из A в D – через x_2, из B в C – через x_3 и из B в D – через x_4. Задача сводится к определению четырех неизвестных, которые, согласно условию задачи, должны удовлетворять следующей системе четырех уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_3 = 3, \\ x_2 + x_4 = 7 \end{cases} \qquad (9)$$

Кроме того, величины x_1, x_2, x_3, x_4 должны удовлетворять условиям неотрицательности, т.е.

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \qquad (10)$$

и принимать только целочисленные значения. Среди различных допустимых планов перевозок, т.е. различных совокупностей целочисленных значений x_1, x_2, x_3 и x_4, удовлетворяющих условиям (9) и (10), нужно выбрать такой план, для которого суммарный пробег в машино-километрах

$$z = 80x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 90x_3 \qquad (11)$$

будет наименьшим.

Математическая модель задачи, состоящая из выражений (9) – (11), оказалась также линейной. При этом в отличие от предыдущих моделей в данной задаче система ограничительных условий содержит, кроме неравенств, уравнения (9).

Дополнительное условие целочисленности, которое в общем случае значительно усложняет методы решения, в данной задаче позволяет произвести непосредственный перебор всех допустимых планов и путем вычисления для каждого из них значения величины z выбрать таким образом оптимальный план. Действительно, из третьего уравнения (9) и условий целочисленности и неотрицательности следует, что x_1 (или x_3) могут принимать только четыре значения: 0, 1, 2 и 3. Подставляя эти значения x_1 во все остальные уравнения (9), определим таким образом четыре допустимых плана перевозок. Все эти планы, а также соответствующие каждому из них значения величины z показаны в табл.4.

Таблица 4

План перевозок	x_1	x_2	x_3	x_4	z
I	0	6	3	1	450
II	1	5	2	2	580
III	2	4	1	3	610
IV	3	3	0	4	690

Из табл. 4 следует, что оптимальным является I план, для которого суммарный пробег $z_{наим}$ = 450 машино-километров.

Обобщая рассмотренные примеры, дадим общую формулировку задач линейного программирования.

Пусть течение исследуемого процесса характеризуется n переменными факторами, численные значения которых характеризуются набором переменных x_1, x_2, …, x_n. Эти переменные должны удовлетворять некоторым ограничительным условиям, выраженным в виде системы линейных уравнений или неравенств.

Для записи этих уравнений или неравенств в общем виде воспользуемся буквенными коэффициентами. При этом, согласно принятой в линейной алгебре символике, все коэффициенты обозначим одной буквой с двумя индексами, например a_{ij}, где первый индекс (i) указывает номер соответствующего уравнения или неравенства в общей системе ограничений, а второй индекс (j) – номер переменной с данным коэффициентом.

Пусть система ограничений включает l уравнений и $(m - l)$ неравенств. Все неравенства будем предполагать одного знака, т.к. путем умножения обеих частей неравенства на –1 можно знак неравенства заменить противоположным.

Тогда систему ограничений запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{lk}x_k + \ldots + a_{\ln}x_n = a_{l0}, \\ a_{l+1}x_1 + a_{l+1}x_2 + \ldots + a_{l+1}x_k + \ldots + a_{l+1}x_n \le a_{l+1,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n \le a_{m0} \end{cases} \tag{12}$$

Кроме этих общих ограничительных условий, в задачах линейного программирования фигурируют еще условия неотрицательности, которые могут накладываться не на все n переменных.

Пусть требования неотрицательности распространяются на первые t переменных (где $t \le n$), т.е.

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \ldots; x_t \ge 0 \tag{13}$$

Эти простейшие неравенства можно было включить в систему (12), однако для дальнейшего исследования их целесообразно выделить самостоятельно.

Любая совокупность значений x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющих системе (12) и условию (13), определяет один из *допус-*

тимых вариантов процесса. В общем случае их будет бесчисленное множество.

Каждый из этих вариантов характеризуется некоторым показателем z, который будем полагать зависящим линейно от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \qquad (14)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - постоянные числа.

Конечной целью исследования является определение такого допустимого варианта, для которого функция z, именуемая в дальнейшем *целевой функцией*, принимает оптимальное (наибольшее или наименьшее) значение.

Выражения (12) – (14) образуют *линейную математическую модель общей задачи линейного программирования*, математическая формулировка которой следующая.

Найти совокупность значений n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *удовлетворяющих системе ограничительных условий (12), условиям неотрицательности (13) и для которых целевая функция (14) принимает наибольшее (или наименьшее) значение.*

Совокупность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе ограничений (12) и (13), называется *допустимым решением*, а допустимое решение, для которого функция (14) принимает наибольшее или наименьшее значение, – *оптимальным решением* задачи линейного программирования.

ГЛАВА 2

§ 1. Различные формы модели задач линейного программирования

Общая форма модели задач линейного программирования, как указывалось выше, характеризуется следующим образом.

Задача I. *Найти совокупность значений n переменных* x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющих системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{\ln}x_n = a_{l0}, \\ a_{l+1}x_1 + \ldots + a_{l+1}x_n \le a_{l+1,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_{m0} \end{cases} \qquad (1)$$

и условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \ldots;\ x_t \ge 0 \ (\text{где } t \le n), \qquad (2)$$

для которых линейная функция (целевая функция)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (3)$$

достигает экстремума (максимума или минимума).

Вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе (1), называют *возможным решением (планом).* Если координаты x_1, x_2, …, x_n удовлетворяют еще условиям неотрицательности (2), то $\overline{X}$ называют *допустимым решением*, или *допустимым планом* задачи. Совокупность всевозможных допустимых решений (планов) задачи называют *областью допустимых решений (областью определения)* задачи.

Допустимое решение $\overline{X}$, для которого линейная функция (3) достигает максимума (или минимума), называется *оптимальным решением (оптимальным планом) задачи.*

Если условиям неотрицательности подчинены все переменные $(t = n)$, то условия (2) называются однородными, если же $(t < n)$, то смешанными.

Неоднородные условия неотрицательности всегда могут быть приведены к однородным путем введения вместо каждой произвольной (т.е. не подчиненной этим условиям) переменной x двух неотрицательных переменных x' и x'' из соотношения $x = x' - x''$. Аналогично приводятся условия отрицательности (отрицательная переменная x заменяется на неотрицательную переменную x' из соотношения $x = -x'$).

Количество переменных при этом, конечно, возрастает, но модель задачи приобретет однообразный вид. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что условию неотрицательности подчинены все переменные (т.е. $t = n$).

Ограничительные условия (1) могут состоять только из уравнений ($l = m$), только из неравенств ($l = 0$) или из уравнений и неравенств ($0 < l < m$). В первых двух случаях они называются *однородными* и в третьем случае – *смешанными* условиями.

Хотя ниже будет показано, что один вид ограничительных условий может быть преобразован в другой, однако при рассмотрении различных вопросов целесообразно исходить из различных типов ограничительных условий. Поэтому наряду с общей формой модели задач линейного программирования рассмотрим модель, заданную однородными ограничительными условиями в виде системы неравенств и в виде системы уравнений.

Задача II. *Найти совокупность значений n переменных x_k (где k =1, 2, ..., n), удовлетворяющих системе r неравенств*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n \le a_{r0} \end{cases} \tag{4}$$

и условиям неотрицательности $x_k \ge 0$ *(где k=1, 2,..., n),* (5)

для которых целевая функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{6}$$

достигает экстремума.

В такой форме задача оказывается особенно удобной для графического решения (если число переменных не превышает двух).

Задача III. *Найти совокупность значений n переменных x_k (где k=1, 2, ..., n), удовлетворяющих системе m уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mrn}x_n = a_{m0} \end{cases} \qquad (7)$$

и условиям неотрицательности $x_k \geq 0$ *(где k=1, 2, ..., n),* (8)

для которых целевая функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (9)$$

достигает максимума.

В данной модели, которая получила название *канонической*, цель исследования сформулирована в виде требования максимизации функции z. Это сделано для однообразия формулировки задачи на основании следующих соображений. Если в задаче требуется минимизировать функцию z, то, заменив ее на противоположную ($z_1 = -z = c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$), придем к эквивалентной задаче максимизации функции z_1.

Каноническая форма модели оказывается удобной при изложении основного вычислительного метода – симплексного.

Покажем, каким образом можно преобразовать один вид ограничительных условий в другой.

Пусть дано линейное неравенство с n переменными:

$$a_1x_1 + a_2x_2 ++ a_nx_n \leq a_0 \qquad (10)$$

Добавив к левой части некоторую неотрицательную величину

$$x_{n+1} \geq 0, \qquad (11)$$

называемую *балансовой (выравнивающей)* переменной, превратим его в уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = a_0 \qquad (12)$$

Теорема. *Каждому решению* $\overline{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *неравенства (10) соответствует единственное решение* $\overline{Y} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ *уравнения (12) и неравенства (11) и, наоборот, каждому решению* $\overline{Y}$ *уравнения (12) и неравенства (11) соответствует единственное решение* $\overline{X}$ *неравенства (10).*

Следовательно, указанные преобразования позволяют от канонической формы модели, заданной выражениями (7), (8) и (9), перейти к эквивалентной ей задаче II.

§ 2. Элементы теории двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом с ней связанную другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Совместное рассмотрение таких пар двойственных задач оказывается весьма эффективным средством теоретического исследования проблем линейного программирования и построения различных вычислительных методов. Кроме того, рассмотрение двойственных задач играет большую роль при экономическом анализе результатов расчета.

Рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями – неравенствами, которую обозначим задачей **I**:

Найти решение $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$*, удовлетворяющее системе неравенств*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n \le a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n \le a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n \le a_{i0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rk}x_k + \ldots + a_{rn}x_n \le a_{r0} \end{cases} \tag{1}$$

и условиям неотрицательности $x_k \ge 0$ *(где* $k=1, 2, \ldots, n$*),* (2)

для которого функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k + \ldots + c_nx_n + c_0 \tag{3}$$

достигает максимума.

Построим другую задачу I′:

Найти решение $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_r)$*, удовлетворяющее системе неравенств*

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + \ldots + a_{r1}y_r \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{i2}y_i + \ldots + a_{r2}y_r \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}y_k + a_{2k}y_k + \ldots + a_{ik}y_i + \ldots + a_{rk}y_r \ge c_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_n + \ldots + a_{in}y_i + \ldots + a_{rn}y_n \ge c_n \end{cases} \tag{1′}$$

и условиям неотрицательности $y_i \ge 0$ *(где* $i=1, 2, \ldots, r$*),* (2′)

для которого функция

$$\omega = a_{10}y_1 + a_{20}y_2 + \ldots + a_{i0}y_i + \ldots + a_{r0}y_r + c_0 \qquad (3')$$

достигает минимума.

Задача I′ называется *двойственной (*или *сопряженной)* к задаче I. Можно показать, что если задачу I′ записать в форме, аналогичной задаче I, то двойственной к ней будет исходная задача I.

Таким образом, понятие двойственности является взаимным. Поэтому задачи I и I′ называются *взаимно двойственными* (или *взаимосопряженными*).

Многочисленные приложения теории двойственности опираются на следующие важные теоремы.

Теорема 1 (основная теорема двойственности).

1. Если одна из двойственных имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений $\overline{X}$ *и* $\overline{Y}$ *выполняется равенство* $z_{max} = \omega_{min}$.

2. Если одна из двойственных задач неразрешима из-за $z_{\max}\to\infty$ *(или* $\omega_{\min} \to -\infty$*), то другая задача не имеет допустимых решений.*

Теорема 2 (вторая теорема двойственности). *Если для оптимального решения одной из задач какое-либо неравенство удовлетворяется как строгое неравенство (т.е.* $x_{n+I} > 0$ *или* $y_{m+k} > 0$*), то соответствующая ему переменная в каждом оптимальном решении двойственной задачи (*y_i *или* x_k*) в опти-*

мальном решении положительна, то соответствующее ей неравенство двойственной задачи любым ее оптимальным решением обращается в равенство.

ГЛАВА 3

Графический метод

Графический метод решения задач линейного программирования, как будет видно из дальнейшего, имеет весьма ограниченную область применения (не более двух переменных в задаче II). Однако в случае большего числа переменных можно с помощью графического метода найти оптимальное решение двойственной задачи, а затем на основании условий второй теоремы двойственности отыскать оптимальный план исходной задачи.

Рассмотрим этот метод применительно к задаче

$$\begin{aligned} &x_1 \quad -2x_3 \qquad\qquad \ge 5, \\ &2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \le 6, \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \\ &z = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 10x_5 \to \max \end{aligned} \tag{1}$$

В данной задаче содержится пять переменных, поэтому целесообразно вначале решить двойственную задачу, а затем с помощью условий теоремы о дополняющей нежесткости (2-й теоремы двойственности) найдем решение исходной задачи.

Запишем исходную задачу в стандартной форме:

$$\begin{aligned} &u_1 \leftrightarrow -x_1 \quad + 2x_3 \qquad\qquad \le -5, \\ &u_2 \leftrightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \le 6, \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \\ &z = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 10x_5 \to \max \end{aligned} \tag{2}$$

Составим двойственную задачу, сопоставляя каждому i-му неравенству типа "$\le$" стандартной задачи двойственную переменную u_i, используя правило, сформулированное в §2 главы 2.

Используя указанное правило, получим следующую двойственную задачу:

$$x_1 \leftrightarrow -u_1 + 2u_2 \ge 2,$$

$$x_2 \leftrightarrow \quad -u_2 \ge -3,$$

$$x_3 \leftrightarrow 2u_1 - u_2 \ge 2, \qquad (3)$$

$$x_4 \leftrightarrow \quad u_2 \ge 1,$$

$$x_5 \leftrightarrow \quad -2u_2 \ge -10,$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0. \qquad (4)$$

$$\omega = -5u_1 + 6u_2 \to \min \qquad (5)$$

В двойственной задаче каждой неизвестной x_j исходной задачи соответствует неравенство типа "$\ge$".

Найдем в двойственной задаче (3) оптимальное решение графическим способом.

Построим прежде всего в системе координат u_1Ou_2 область допустимых решений (ОДР) задачи. Для этого, заменив каждое из неравенств (3) равенством, строим соответствующую *граничную прямую* $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 = a_{i0}$ (i = 1, 2,…, r). Эта прямая делит плоскость u_1Ou_2 на две полуплоскости (рис.1). Для координат u_1, u_2 любой точки A одной полуплоскости выполняется неравенство $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 \le a_{i0}$, а для любой точки B другой полуплоскости – противоположное неравенство $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 \ge a_{i0}$.

Координаты любой точки граничной прямой удовлетворяют уравнению $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 = a_{i0}$.

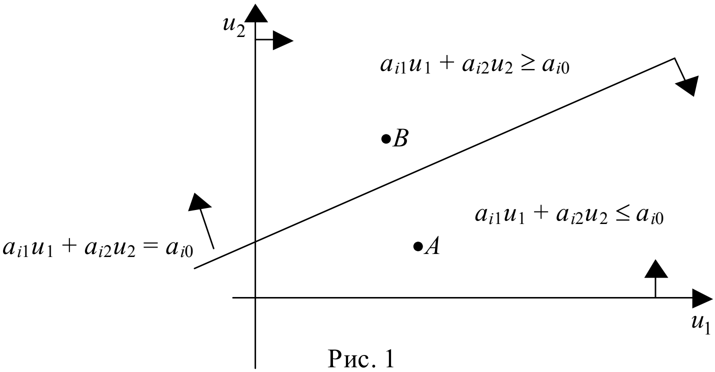


Рис. 1

Для определения, по какую сторону от граничной прямой располагается полуплоскость, соответствующая заданному неравенству, достаточно “испытать” одну какую-нибудь точку (проще всего точку $O(0, 0)$). Если при подстановке ее координат в левую часть неравенства оно удовлетворяется, то полуплоскость обращена в сторону к "испытуемой" точке, если же неравенство не удовлетворяется, то соответствующая полуплоскость обращена в противоположную сторону. Направление полуплоскости показывается на чертеже стрелкой. Неравенствам $u_1 \ge 0$ и $u_2 \ge 0$ также соответствуют полуплоскости, расположенные справа от оси ординат и над осью абсцисс. На рисунке строим граничные прямые и полуплоскости, соответствующие всем неравенствам. Общая часть (“пересечение”) всех этих полуплоскостей будет представлять собой область допустимых решений данной задачи.

Итак, имеем пять уравнений, определяющих пять граничных прямых:

$-u_1 + 2u_2 = 2$ (1)

$-u_2 = -3$ (2)

$2u_1 - u_2 = 2$ (3)

$u_2 = 1$ (4)

$-2u_2 = -10$ (5)

$u_1 = 0$ (6)

$u_2 = 0$ (7)

На рис. 2 проведены все граничные прямые со стрелками, указывающими расположение искомых полуплоскостей, и показана ОДР с ее границей. Как видно из графических построений, в данной задаче ОДР представляет собой неограниченную многоугольную плоскость (в общем случае ОДР может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью).

В этой области необходимо отыскать точку минимума целевой функции $\omega = -5u_1 + 6u_2$ двойственной задачи. Находим градиент функции ω, он равен $grad\,\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_1}, \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right) = (-5{,}6)$. Из начала координат в направлении к точке (–5, 6) проводим вектор произвольной длины – нормаль к линиям уровня линейной функции ω. Перпендикулярно этому вектору проводится какая-нибудь прямая. Это и будет одна из линий уровня линейной функции. Ее уравнение будет $-5u_1 + 6u_2 = h$. На рис. 1 проведена линия нулевого уровня – прямая, проходящая через начало координат, ее уравнение имеет вид $-5u_1 + 6u_2 = 0$. Целевая функция ω на всех точках этой прямой принимает нулевое значение. Если двигать эту прямую параллельно в направлении нормали, функция ω будет возрастать. Ближайшая точка из ОДР, которой коснется линия уровня, и будет точкой минимума U^*. В нашем примере этой точкой является точка A.

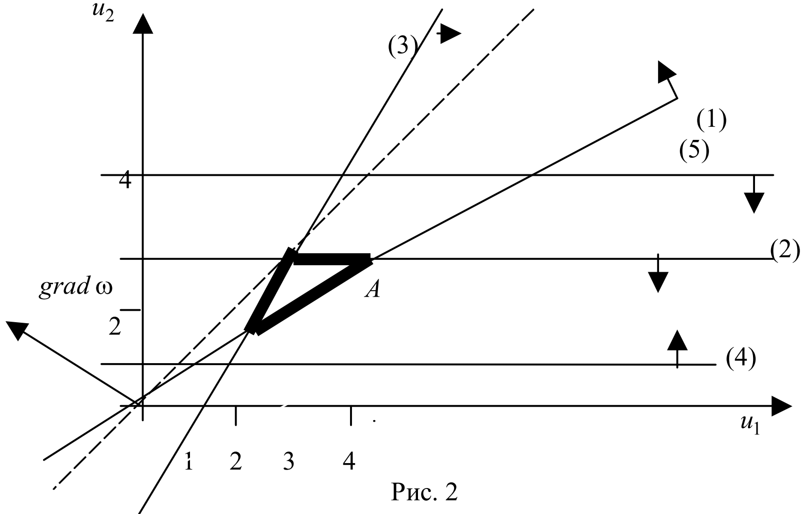


Рис. 2

Найденная точка минимума находится на пересечении первой и второй граничных прямых, уравнения которых известны. Определим координаты этой точки аналитическим путем решения системы уравнений (1) и (2). Имеем систему

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 = 2, \\ -u_2 = -3, \end{cases}$$

из которой получаем $U^* = (4,\ 3)$. Значение целевой функции на этом решении равно $\omega^* = -5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = -2$.

Теперь с помощью условий теоремы о дополняющей нежесткости и найденного вектора двойственных оценок определяем оптимальный план исходной задачи. Для того, чтобы допустимый план X исходной задачи и допустимый вектор двойственных оценок U двойственной задачи были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1^0. $x_j \cdot v_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n;$

2^0. $u_i \cdot y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$

где $v_j = \sum_i a_{ij} u_i - c_j$ – разность между левой и правой частями j-го двойственного неравенства (соответствующего переменной x_j);

$y_i = b_i - \sum_j a_{ij} x_j$ – разность между правой и левой частями i-го неравенства исходной задачи (имеющего оценку u_i).

Из теоремы вытекает, что если известен вектор оптимальных оценок U^*, то, подставляя его компоненты в условия 1^0 и 2^0, получим систему уравнений для нахождения компонент оптимального плана X^*.

Из условий 1^0 теоремы о дополняющей нежесткости находятся компоненты оптимального плана, значения которых равны нулю, т.е. пассивные компоненты, по правилу: если величина $v_j = \sum_i a_{ij} u_i - c_j$, вычисленная путем подстановки двойственных оценок u_i найденных для них оптимальных числовых значений окажется положительной, то соответствующая компонента x_j в оптимальном плане принимает нулевое значение ($v_j > 0 \Rightarrow x_j > 0$).

Из условий 2^0 определяются активные ограничения исходной задачи, т.е. те ресурсы, которые в оптимальном плане используются полностью. Если оптимальная оценка $u_i > 0$, то соответствующая величина y_i равна нулю ($v_j > 0 \Rightarrow y_j > 0$). Так как величина y_i является разностью между правой и левой частями i-го неравенства исходной задачи, то равенство $y_i = 0$ означает, что это неравенство должно удовлетворяться как строгое равенство (уравнение) для оптимального плана.

Подставим сначала найденное оптимальное двойственное решение в условия 1^0, получим

$x_1 v_1 = 0,\ v_1 = -u_1 + 2u_2 - 2 = -4 + 2 \cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 > 0,$

$x_2 v_2 = 0,\ v_1 = \qquad -u_2 + 3 = -3 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 > 0,$

$x_3 v_3 = 0,\ v_1 = 2u_1 - u_2 - 2 = 2 \cdot 4 - 3 - 2 = 2 \quad \Rightarrow x_3 = 0,$

$x_4 v_4 = 0,\ v_4 = \qquad u_2 - 1 = 3 - 1 = 2 \qquad \Rightarrow x_4 = 0,$

$x_5 v_5 = 0,\ v_5 = \quad -2u_2 + 10 = -2 \cdot 8 + 10 = 2 \quad \Rightarrow x_5 = 0$

Для выяснения вопроса, какие неравенства исходной задачи на оптимальном решении X^* обращаются в уравнения, используем условие 2^0:

$u_1 y_1 = 0,\ u_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 0 \sim -x_1 \qquad +2x_3 \qquad\qquad = -5,$

$u_2 y_2 = 0,\ u_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 0 \sim 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 6$

Приходим к следующей системе уравнений:

$$-x_1 \qquad +2x_3 \qquad\qquad = -5,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 6,$$

откуда $X^*(5, 4, 0, 0, 0)$. Значение целевой функции на этом плане равно

$z^* = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 0 - 10 \cdot 0 = -2.$

Выпишем итоговые результаты решения задачи:

$U^* = (4, 3),\ X^* = (5, 4, 0, 0, 0),\ z^* = \omega^* = -2$

ГЛАВА 4

Симплекс-метод

Симплекс-метод относится к числу наиболее распространенных вычислительных методов, реализующих идею последовательного улучшения решения. Этот метод является универсальным, т.е. может быть применен при решении любой задачи линейного программирования. Метод позволяет вести расчеты как вручную, так и на электронных вычислительных машинах.

В основе симплекс-метода лежит алгоритм симплексных преобразований системы, дополненной правилом, обеспечивающим переход не к любому, а к «лучшему» опорному решению.

Проиллюстрируем алгоритм симплекс-метода на решении простейшей задачи:

$$
\begin{aligned}
&-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 2, \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 5, \\
&-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 0, \qquad (1) \\
&x_1 - x_3 + 2x_4 \ge -1, \\
&x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0, \\
&z = 16x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 \to \max
\end{aligned}
$$

§ 1. Подготовка задачи к решению (составление начальной симплексной таблицы)

Перед решением составляется начальная симплексная таблица, в которой исходная задача записывается в эквивалентной ей канонической форме. В каждое неравенство для балансировки (уравнивания) левой и правой частей вводится вспомогательная неотрицательная переменная. Переменная y_i полагается равной разности между правой и левой частями для стандартных неравенств (типа "≤") или разности между левой и правой частями для нестандартных неравенств (типа "≤").

В табл.0 представлена начальная симплексная таблица для исходной задачи (1) после перехода от неравенств к уравнениям с помощью вспомогательных переменных y_i. Все уравнения, записанные в табличной форме, разрешены относительно переменных y_i.

Формально начальная таблица составляется так: все коэффициенты стандартных неравенств записываются в начальную симплексную таблицу без изменения знаков, коэффициенты же нестандартных неравенств и максимизируемой функции меняют знаки на противоположные.

Табл.0(исх.)

Табл.0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
Y_1 =	–2	2	–2	2	2
Y_2 =	–2	–2	–1	0	–5
y_3 =	–1	1	–2	1	0
y_4 =	–1	0	1	–2	1
z =	16	–2	8	–2	0

Умножая последовательно на верхнюю строку все остальные строки табл. 0, получим исходную систему уравнений:

$$y_i = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2$$

$$y_2 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad -5$$

$$y_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \tag{2}$$

$$y_4 = x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 + 1$$

$$z = -16x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 2x_4$$

Система (2) используется в дальнейшем для контроля правильности определения неизвестных величин x_j, y_i и z.

Если составить двойственную задачу к исходной и перейти затем к эквивалентной канонической форме, то ее можно представить в табличной форме: табл.0(дв.)

Табл. 0(дв.)

Табл.0	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	ω =
u_1	–2	2	–2	2	2
u_2	–2	–2	–1	0	–5
u_3	–1	1	–2	1	0
u_4	–1	0	1	–2	1
1	16	–2	8	–2	0

Здесь u_i – это двойственные переменные, соответствующие строчным неизвестным y_i исходной задачи, v_j – двойственные переменные, соответствующие столбцовым переменным x_j, а ω – целевая функция двойственной задачи.

Система двойственных уравнений получается последовательным умножением на левый столбец табл.0(дв.) всех остальных ее столбцов:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -2u_1 - 2u_2 - u_3 - u_4 + 16, \\
v_2 &= 2u_1 - 2u_2 + u_3 \qquad -2, \\
v_3 &= -2u_1 - u_2 - 2u_3 + u_4 + 8, \\
v_4 &= 2u_1 \qquad + u_3 - 2u_4 - 2, \\
\omega &= 2u_1 - 5u_2 \qquad + u_4
\end{aligned} \tag{3}$$

Система (3) используется в дальнейшем для проверки правильности значений двойственных переменных u_i, v_j и значения двойственной целевой функции ω. Так как все числовые коэффициенты табл.0(дв.) совпадают с элементами табл.0(исх.), то они могут быть совмещены в единую таблицу следующего вида:

Табл.0

	$v_1 = -x_1$	$v_2 = -x_2$	$v_3 = -x_3$	$v_4 = -x_4$	$\omega = 1$	
$u_1 y_1 =$	–2	2	–2	2	2	
$u_2 y_2 =$	–2	–2	–1	0	–5	
$u_3 y_3 =$	–1	1	–2	1	0	
$u_4 y_4 =$	–1	0	$\boxed{1}$	–2	1	←
$1z =$	16	–2	8	–2	0	
			↑			

На этом завершается этап построения начальной симплексной таблицы.

§ 2. Общее описание симплекс-метода

После представления прямой и двойственной задач в табличной форме для их решения применяется симплекс-метод.

За конечное число шагов с помощью симплекс-метода находятся оптимальные решения исходной и двойственной задач, если они существуют. В противном случае выясняется, что исходная задача несовместна или устанавливается неограниченность целевой функции z в области допустимых решений.

На каждом шаге в процессе решения задач симплексные таблицы преобразуются. Последовательно преобразуются и находящиеся в таблицах прямое и двойственное решения. Эти решения находятся из симплексных таблиц по следующему правилу: *все небазисные переменные полагаются равными нулю*[*]*, а все базисные переменные прямого (двойственного) решения приравниваются к соответствующим элементам последнего столбца (строки) таблицы.*

Компоненты прямого и двойственного решений x_j, y_i, u_i, v_j, получаемые симплекс-методом, удовлетворяют условиям (2), (3) и условиям дополняющей нежесткости

$$x_j v_j = 0,\ u_i y_i = 0 \qquad (4)$$

Поэтому как только прямое и двойственное решения станут неотрицательными, то они будут и допустимыми решениями, что вместе с условиями (4) гарантирует их оптимальность.

Следовательно, одновременная неотрицательность прямого и двойственного решений, получаемых симплекс-методом, является признаком их оптимальности.

Таким образом, если в симплексной таблице в последних ее столбце и строке не окажется отрицательных элементов, то это означает, что получены оптимальные решения прямой и двойственной задач (элемент таблицы, стоящий на пересечении

[*] Небазисные переменные исходной задачи всегда располагаются сверху таблицы, а базисные – слева. Для двойственной задачи наоборот: небазисные переменные – слева, базисные – сверху.

последнего столбца и последней строки, не принимается во внимание, т.к. он определяет значение целевых функций, которые на оптимальных решениях могут быть и отрицательными).

Задачи линейного программирования с неизвестными опорными планами решаются в два этапа. Вначале отыскивается допустимое решение какой-нибудь пары двойственных задач, а затем производится последовательное его улучшение. Прямой симплекс-метод находит и последовательно улучшает опорный план исходной задачи.

На обоих этапах симплекс-метода выполняются следующие основные его процедуры:

1. Поиск среди небазисных переменных прямого решения кандидата для перевода в базисные (определение разрешающего столбца).

2. Нахождение среди базисных переменных прямого решения кандидата для перевода в небазисные (определение разрешающей строки).

3. Взаимный обмен ролями найденных кандидатов и преобразование симплексной таблицы относительно разрешающего элемента.

Реализация процедуры 2 и 3 на обоих этапах происходит одинаково. Что касается процедуры 1, то ее реализация на первом этапе несколько отличается от второго этапа. Различие обусловлено тем, что на первом этапе выбор кандидата в базис должен обеспечивать движение в область допустимых решений исходной задачи, а на втором – движение к оптимуму. Эти две разные цели достигаются избавлением сначала от отрицательных компонент в прямом решении, а затем уже от отрицательных компонент в двойственном решении.

Ниже, в таблице, приведено описание процедур симплекс-метода.

Попутно, по виду симплексной таблицы, на первом этапе можно установить несовместность условий исходной задачи: *если хотя бы в одной строке с отрицательным элементом в последнем столбце не окажется больше отрицательных элементов, то исходная задача несовместна, т.е. ОДР = Ø.*

Если на этапе II хотя бы в одном столбце с отрицательным элементом в z-строке нет положительных элементов, то целевая функция исходной задачи неограниченно возрастает в ОДР.

В заключение укажем некоторые практические рекомендации, касающиеся техники расчетов:

– если в разрешающей строке содержатся нулевые элементы, то соответствующие им столбцы остаются без изменения;

– если в разрешающем столбце содержатся нулевые элементы, то соответствующие строки остаются без изменения;

– если на каком-то этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. оказывается несколько равных минимальных отношений $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$, то следует выбирать ту строку, для которой будет наименьшим отношение элементов следующего столбца к разрешающему.

Отметим также, что для упрощения вычислений разрешающий элемент следует по возможности выбирать «хорошим», т.к. на него приходится делить в формулах преобразования таблиц. Этого иногда можно добиться, выбирая из возможных кандидатов в разрешающие столбцы и строки наиболее подходящие.

§ 3. Численное решение примера

Вернемся к начальной симплексной таблице. Выпишем из нее начальное прямое и двойственное решения

$$X = (0, 0, 0, 0),\ Y = (2, -5, 0, 1),\ z = 0,$$

$$V = (16, -2, 8, -2),\ U = (0, 0, 0, 0),\ \omega = 0 \qquad (5)$$

Как видно из формулы (5), решение пары двойственных задач начинается с нулевых значений их основных неизвестных. Нулевой вектор X в (5) не является допустимым решением исходной задачи (1), т.к. он не удовлетворяет второму неравенству, о чем свидетельствует отрицательность второй компоненты вектора *Y*. Точно так же нулевой вектор *U* не является допустимым решением в двойственной задаче, так как вектор *V* содержит отрицательные компоненты.

Следовательно, задачу необходимо решать в два этапа.

Решение начинается с реализации процедуры *поиска разрешающего столбца* (см. описание процедур симплекс-метода).

Вторая строка в последнем столбце содержит отрицательный элемент, т.к. первый, второй и третий столбцы содержат отрицательные элементы, то любой из них может быть разрешающим. Возьмем, например, в качестве разрешающего третий столбец. На этом выполнение первой процедуры заканчивается.

Процедура поиска разрешающей строки. Находим минимальное неотрицательное отношение элементов последнего столбца и разрешающего (третьего) столбцов, $\min\left(\frac{-5}{-1},\frac{1}{1}\right) = 1$. Минимальное отношение соответствует четвертой строке, она и будет разрешающей (разрешающие строка и столбец показаны на табл.0 стрелками). Элемент 1, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, становится разрешающим.

Переходим к третьей процедуре – *преобразованию симплексной таблицы* относительно разрешающего элемента. Меняется «шапка» таблицы – пары переменных u_4y_4 и v_3x_3 меняются ролями и местами.

В результате преобразования табл.0 получим табл.1.

Табл. 1

	$v_1 = -x_1$	$v_2 = -x_2$	$u_4 = -y_4$	$v_4 = -x_4$	$\omega = 1$
$U_1 y_1 =$	–4	2	2	–2	4
$U_2 y_2 =$	–3	$\boxed{-2}$	1	–2	–4
$U_3 y_3 =$	–3	1	2	–3	2
$V_3 x_3 =$	–1	0	1	–2	1
$1z =$	24	–2	–8	14	–8

Вычисление новых элементов таблицы лучше начинать с последних столбца и строки, т.к. в случае неотрицательности прямого и двойственного решений процесс отыскания решения заканчивается.

Разрешающий элемент 1 заменен в табл.1 на обратную величину – 1. Четвертая строка табл.1 получена делением разрешающей строки на разрешающий элемент 1. Третий столбец табл.1 получен делением разрешающего столбца на элемент, противоположный разрешающему, т.е. на –1.

Все остальные элементы табл.1 рассчитаны по правилу прямоугольника. Например, чтобы вычислить новый элемент второй строки и четвертого столбца, берется соответствующий этому элементу прямоугольник, откуда

$$\text{новый элемент} = \frac{0 \times 1 - (-1) \times (-2)}{1} = -2$$

Полученная табл.1 определяет следующие новые решения исходной и двойственной задач:

$$X = (0, 0, 1, 0), \qquad Y = (4, -4, 2, 0), \quad z = -8,$$

$$V = (24, -2, 0, 14),\ U = (0, 0, 0, -8),\ \omega = -8 \qquad (6)$$

Для контроля правильности найденных компонент прямого и двойственного решений необходимо подставить их в системы уравнений исходной (2) и двойственной задач (3).

Проверка решения

Прямого	Двойственного
$4 = 2 \times 0 - 2 \times 0 + 2 \times 1 - 2 \times 0 + 2$	$24 = -2 \times 0 - 2 \times 0 - 0 - (-8) + 16$
$-4 = 2 \times 0 + 2 \times 0 + 1 - 5$	$-2 = 2 \times 0 - 2 \times 0 + 0$
$2 = 0 - 0 + 2 \times 1 - 0$	$0 = -2 \times 0 - 0 - 2 \times 0 - (-8) + 8$
$0 = 0 - 1 + 2 \times 0 + 1$	$14 = 2 \times 0 + 0 - 2 \times (-8) - 2$
$-8 = -16 \times 0 + 2 \times 0 - 8 \times 1 + 2 \times 0$	$-8 = 2 \times 0 - 5 \times 0 - 8$

Найденные решения удовлетворяют уравнениям исходной и двойственной задач. Получением новых решений и проверкой заканчивается одна итерация симплекс-метода.

Так как вектор Y по-прежнему содержит отрицательную компоненту $y_2 = -4$, то вектор X не является допустимым решением исходной задачи.

<table>
<tr><td rowspan="2">Процедура</td><td colspan="2">Реализация процедуры</td></tr>
<tr><td>Этап I – построение допустимого плана</td><td>Этап II – оптимизация плана</td></tr>
<tr><td>Поиск разрешающего столбца</td><td>Рассматриваются строки симплексной таблицы с отрицательными элементами в последнем столбце (за исключением последней строки) и выбирается одна из них. В качестве разрешающего столбца выбирается любой столбец, содержащий в данной строке отрицательный элемент</td><td>В качестве разрешающего столбца выбирается столбец с отрицательным элементом в последней строке</td></tr>
<tr><td>Поиск разрешающей строки</td><td colspan="2">Находятся неотрицательные отношения элементов последнего столбца к элементам разрешающего столбца (нулевые элементы последнего столбца делятся только на положительные элементы разрешающего столбца). В качестве разрешающей строки выбирается строка, отвечающая минимальному отношению</td></tr>
<tr><td>Преобразование симплексной таблицы</td><td colspan="2">– разрешающий элемент α заменяется на обратную величину $1/\alpha$;
– разрешающая строка делится на разрешающий элемент;
– разрешающий столбец делится на разрешающий элемент с противоположным знаком;
– все остальные элементы таблицы преобразуются по правилу прямоугольника
$$\boxed{\textit{новый элемент}} = \frac{\boxed{\textit{старый элемент}} \times \boxed{\textit{разрешающий элемент}} - \boxed{\textit{элемент разрешающего столбца}} \times \boxed{\textit{элемент разрешающего столбца}}}{\boxed{\textit{разрешающий элемент}}}$$</td></tr>
</table>

Переходим к выполнению второй итерации симплекс-метода.

Берем вторую строку табл.1 с отрицательным элементом в последнем столбце. В качестве разрешающего столбца можно взять первый, второй или четвертый, т.к. они содержат отрицательные элементы во второй строке. Возьмем второй столбец. Находим $\min\left(\frac{4}{2}, \frac{-4}{-2}, \frac{2}{1}\right) = 2$. Минимальное отношение отвечает первой, второй и третьей строкам, поэтому в качестве разрешающей можно взять любую из них. Возьмем, например, вторую строку. Элемент –2, обведенный прямоугольником в табл.1, будет разрешающим.

В результате преобразования табл.1 получим следующую таблицу.

Табл. 2

	$v_1 = -x_1$	$u_2 = -y_2$	$u_4 = -y_4$	$v_4 = -x_4$	$\omega = 1$	
$u_1 y_1 =$	–7	1	$\boxed{3}$	–4	0	←
$v_2 x_2 =$	3/2	–1/2	–1/2	1	2	
$u_3 y_3 =$	–3/2	1/2	–5/2	–4	0	
$v_3 x_3 =$	–1	0	1	–2	1	
$1z =$	27	–1	–9	16	–4	
			↑			

Табл.2 определяет новые решения прямой и двойственной задач.

$$X = (0, 2, 1, 0), \quad Y = (0, 0, 0, 0), \quad z = –4,$$
$$V = (27, 0, 0, 16), U = (0, -1, 0, -9), \omega = –4 \qquad (7)$$

Проверка решения

Прямого	Двойственного
$0 = 2 \times 0 – 2 \times 2 + 2 \times 1 – 2 \times 0 + 2$	$27 = –2 \times 0 – 2 \times (–1) – 0 – (–9) + 16$
$0 = 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 – 5$	$0 = 2 \times 0 – 2 \times (–1) + 0 – 2$
$0 = 0 – 2 + 2 \times 1 – 0$	$0 = –2 \times 0 – (–1) – 2 \times 0 + (–9) + 8$
$0 = 0 – 1 + 2 \times 0 + 1$	$16 = 2 \times 0 + 0 – 2 \times (–9) – 2$
$–4 = –16 \times 0 + 2 \times 2 – 8 \times 1 + 2 \times 0$	$–4 = 2 \times 0 – 5 \times (–1) + (–9)$

Все компоненты векторов X и Y в (7) неотрицательны, следовательно, они определяют допустимое решение исходной задачи (1). На этом этап I завершается и осуществляется переход к этапу II – оптимизации полученного допустимого решения.

Проверяем план на оптимальность. Так как z-строка содержит отрицательные двойственные оценки $u_2 = –1$ и $u_4 = –9$, то полученное допустимое решение не оптимально и его следует попытаться улучшить.

Переходим к третьей итерации.

Среди отрицательных оценок z-строки выбирается какая-нибудь одна. В нашем примере имеются две отрицательных оценки. В качестве разрешающего столбца возьмем, например, третий столбец. Находим минимальное симплексное отношение

$\min\left(\frac{0}{3}, \frac{1}{1}\right) = 0$. Минимум соответствует первой строке, элемент 3 этой строки становится разрешающим. После преобразования табл.2 получаем следующую таблицу.

Табл. 3

	$v_1 = -x_1$	$u_2 = -y_2$	$u_1 = -y_1$	$v_4 = -x_4$	$\omega = 1$
$u_4 y_4 =$	–7/3	1/3	1/3	–4/3	0
$v_2 x_2 =$			1/6		2
$u_3 y_3 =$			5/6		0
$v_3 x_3 =$			–1/3		1
$1z =$	6	2	3	4	–4

Так как последние столбец и стока табл.3 неотрицательные, следовательно, прямое и двойственное решения оптимальны. Выпишем эти решения и проверим их. Имеем

$$X = (0, 2, 1, 0),\ Y = (0, 0, 0, 0),\ z = -4,$$

$$V = (6, 0, 0, 4),\ U = (3, 2, 0, 0),\ \omega = -4 \qquad (8)$$

Проверка решения

Прямого	Двойственного
$0 = 2 \times 0 - 2 \times 2 + 2 \times 1 - 2 \times 0 + 2$	$6 = -2 \times 3 - 2 \times 2 - 0 - 0 + 16$
$0 = 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 - 5$	$0 = 2 \times 3 - 2 \times 2 + 0 - 2$
$0 = 0 - 2 + 2 \times 1 - 0$	$0 = -2 \times 3 - 2 - 2 \times 0 + 0 + 8$
$0 = 0 - 1 + 2 \times 0 + 1$	$4 = 2 \times 3 + 0 - 2 \times 0 - 2$
$-4 = -16 \times 0 + 2 \times 2 - 8 \times 1 + 2 \times 0$	$-4 = 2 \times 3 - 5 \times 2 + 0$

Следовательно, оптимальное решение исходной задачи (1) задается вектором $X^* = (0,\ 2,\ 1,\ 0)$, оптимальные оценки ограничений вектором $U^* = (3,\ 2,\ 0,\ 0)$, при этом целевая функция принимает $z^* = \omega^* = 4$.

ГЛАВА 5

Транспортная задача

Общие методы линейного программирования, которые указывались в предыдущих главах, в принципе дают возможность решить любую задачу, однако, как правило, это решение в практически важных случаях сопряжено со значительными и трудоемкими расчетами. Поэтому представляет интерес выделение отдельных классов задач, решение которых можно получить с помощью приспособленных для них более простых специальных вычислительных методов.

В настоящей главе рассматривается специальный метод – метод потенциалов, основанный на той же идеи последовательного улучшения решения, что и симплексный метод, но учитывающий специфические свойства математической модели транспортной задачи.

§ 1. Модели транспортных задач и их основные свойства

Транспортными задачами называются *задачи определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потребления.*

Простейшая формулировка транспортной задачи, которая получила название *задачи по критерию стоимости*, следующая.

В p пунктах отправления находятся соответственно a_1, $a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_p$ *единиц однородного груза (ресурсы), который должен быть доставлен q потребителям в количествах* b_1, $b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_q$ *единиц (потребности). Заданы стоимости* c_{ik} *перевозок единицы груза из i-го пункта отправления k-му пункту потребления (коэффициенты затрат).*

Требуется спланировать перевозки, т..е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено из любого i-го пункта отправления в любой k-й пункт потребления так, чтобы максимально удовлетворить потребности и чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными.

Различают задачи, где выполняется равенство между суммарными ресурсами и суммарными потребностями:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{k=1}^{q} b_k \qquad (1)$$

и задачи с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \neq \sum_{k=1}^{q} b_k \qquad (1')$$

Математическая модель задачи при условии (1) называется *закрытой моделью*, а при условии (1′) – *открытой моделью транспортной задачи.* Закрытая модель служит для транспортной задачи как бы канонической моделью. Если же задача открыта, то введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя задачу можно закрыть.

Исходные данные описанной задачи удобно располагать в следующей таблице, которую будем называть *распределительной.*

Табл.1

$a_i \backslash b_k$	b_1	b_2	…	b_k	…	b_q
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1k} X_{1k}	…	c_{1q} x_{1q}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2k} X_{2k}	…	c_{2q} x_{2q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ik} x_{ik}	…	c_{iq} x_{iq}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	c_{nk} x_{nk}	…	c_{nq} x_{nq}

Подобные таблицы будут использованы в дальнейшем не только для записи исходных данных, но и для выполнения последовательных итераций метода.

Для составления математической модели задачи введем переменные $x_{ik} \geq 0$, $(i = 1, 2, ..., p;\ k = 1, 2, ..., q)$, обозначающие количество единиц груза, перевозимого из i-го склада k-му потребителю. В отличие от обозначений, принятых в предыдущих главах, здесь удобно переменные снабжать не одним, а двумя индексами.

Очевидно, эти $n = pq$ переменных должны удовлетворять следующим ограничительным условиям:

а) *ограничения по ресурсам:*

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{ik} + ... + x_{iq} = \sum_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i,\ (i = 1, 2, ..., p); \qquad (2а)$$

б) *ограничения по потребностям:*

$$x_{1k} + x_{2k} + ... + x_{ik} + ... + x_{pk} = \sum_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k,\ (k = 1, 2, ..., q); \qquad (2б)$$

в) *условие неотрицательности:*

$$x_{ik} \geq 0,\ (i = 1, 2, ..., p;\ k = 1, 2, ..., q). \qquad (3)$$

Уравнения (2а) выражают требования, чтобы сумма всех грузов, вывозимых из данного i-го склада, равнялась запасам груза a_i на данном складе; уравнения (2б) – чтобы сумма всех грузов, доставляемых данному k-му потребителю, равнялась потребности b_k этого потребителя.

Суммарные затраты на перевозки будут равны

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{ik}x_{ik} + ... + c_{pq}x_{pq} \qquad (4)$$

Теперь можно сформулировать транспортную задачу математически.

Найти $n = pq$ переменных величин x_{ik}, удовлетворяющих системе $m = p + q$ уравнений (2) и условиям неотрицательности (3), для которых целевая функция (4) принимает минимальное значение.

Нетрудно заметить, что указанная модель совпадает с канонической формой задачи линейного программирования, указанной в главе 3.

Относительная простота системы уравнений (2) определяет возможность использования при ее решении более простого вычислительного алгоритма, чем симплексный метод.

Эти особенности исходной системы уравнений заключаются в следующем.

1) коэффициенты при неизвестных во всех уравнениях равны единице;

2) каждое переменное встречается в двух и только в двух уравнениях;

3) система уравнений симметрична относительно всех переменных x_{ik}.

Рассмотрим алгоритм решения транспортной задачи на конкретном примере. *Имеются четыре поставщика* $a_1 = 30$, $a_2 = 50$, $a_3 = 40$, $a_4 = 33$, *и имеются четыре потребителя* $b_1 = 58$, $b_2 = 22$, $b_3 = 18$, $b_4 = 22$. *Построить опорный план по правилу се-*

веро-западного угла, найти оптимальный план перевозки, обеспечивающий минимум суммарных затрат, если коэффициенты транспортных расходов на доставку груза от поставщиков к потребителям заданы матрицей $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

В данной задаче четыре поставщика и четыре потребителя. Прежде чем приступить к решению транспортной задачи, необходимо ее закрыть, если она открытая.

Суммарный объем груза у поставщиков равен $A = \sum_{i=1}^{4} a_i = 30 + 50 + 40 + 33 = 153$, а суммарная потребность составляет величину $B = \sum_{j=1}^{4} b_j = 58 + 22 + 18 + 22 = 120$. Так как $A > B$, то задача открытая, и чтобы ее закрыть, вводим фиктивного потребителя с потребностью в грузе, равной разности $A - B$. Будем иметь $b_5 = 153 - 120 = 33^*$.

Коэффициенты транспортных расходов на доставку груза от поставщиков к фиктивному потребителю полагаются равными нулю, $c_{i5} = 0$, $i=1, 2, ..., 4$.

Составим закрытую транспортную задачу в табличной форме.

Табл.2

b_k / a_i	58	22	18	22	33
30	5 x_{11}	8 x_{12}	6 x_{13}	2 x_{14}	0 X_{15}
50	2 x_{21}	7 x_{22}	5 x_{23}	3 x_{24}	0 X_{25}
40	1 x_{31}	4 x_{32}	3 x_{33}	5 x_{34}	0 x_{35}
33	6 x_{41}	5 x_{42}	5 x_{43}	2 x_{44}	0 x_{45}

Строки данной таблицы отвечают поставщикам, а столбцы потребителям.

Требуется найти оптимальный план поставок $\{x_{ij}\}$, $i=1,\dots,4;\ j=1,\dots,5,$ т.е. такой план поставок, который:

1) сбалансирован с имеющимися запасами грузов у каждого поставщика и с заданными потребностями каждого потребителя;
2) имеет наименьшие транспортные расходы на доставку всех грузов по сравнению с другими планами поставок.

---

* Если $A < B$, то в транспортную задачу вводится фиктивный поставщик с запасом груза $B - A$.

Условие 1 сбалансированности плана поставок, представленного в табличной форме, проверяется очень просто, а именно: *план полностью сбалансирован, если сумма поставок по каждой строке таблицы равна соответствующему запасу* a_i*, а сумма поставок по каждому столбцу совпадает с соответствующей потребностью* b_j.

Условие 2 проверяется с помощью следующей теоремы.

Теорема *(критерий оптимальности). Для того чтобы некоторое решение* $\{x_{ij}\}$ *транспортной задачи (2), (3), (4) было оптимально, необходимо и достаточно, чтобы существовала система* $p+q$ *чисел* u_i *и* v_j*, которые удовлетворяли бы следующим условиям:*

$$v_j - u_i = c_{ij} \quad \text{для всех занятых клеток, т.е. } x_{ij} > 0, \qquad (5)$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \quad \text{для всех свободных клеток, т.е. } x_{ij} = 0 \qquad (6)$$

Числа u_i, v_j называются *потенциалами* поставщиков и потребителей, а метод поиска оптимального плана поставок, использующий сформулированный критерий оптимальности, называется *методом потенциалов.*

Метод потенциалов исходя из некоторого начального опорного плана поставок строит конечную последовательность планов, сходящуюся к оптимальному плану. Поэтому, прежде чем приступить к нахождению оптимального плана поставок, необходимо иметь какой-нибудь опорный план. Существуют различные способы построения опорных планов в транспортной задаче, мы остановимся на методе северо-западного угла.

§ 2. Правило северо-западного угла

Все исходные данные закрытой транспортной задачи представляются в табличной форме.

Берется северо-западный угол таблицы – клетка (1, 1) и планируется поставка от первого поставщика к первому потребителю в объеме $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(30,50) = 30$. Эта поставка записывается в левый нижний угол клетки. Величина запланированной поставки вычитается из запаса груза a_1 и потребности b_1. Неудовлетворенная потребность первого потребителя становится равной 58 – 30 = 28, а запас груза у первого поставщика полностью исчерпан. Первая строка закрывается, т.е. она больше не участвует при построении начального опорного плана.

В оставшейся части таблицы снова берется северо-западный угол – клетка (2, 1). Полагается $x_{21} = \min(50,28) = 28$, первый потребитель удовлетворен полностью, следовательно, первый столбец закрывается.

Берется клетка (2, 2), полагается $x_{22} = \min(22,22) = 22$ и вычитается величина этой поставки из оставшегося объема груза у второго поставщика и потребности второго потребителя.

В результате такого распределения весь груз второго поставщика оказывается распределенным (запас исчерпан) и удовлетворена полностью потребность в грузе второго потребителя.

Замечание. *Если на каком-нибудь шаге метода северо-западного угла одновременно исчерпывается запас груза у поставщика и удовлетворяется полностью потребитель, то закрыть следует что-либо одно – либо строку, либо столбец.*

Соблюдение данного правила гарантирует занятость $(p + q - 1)$ клеток опорным планом поставок, где p и q – это количество поставщиков и потребителей соответственно. Это необходимо в дальнейшем для нахождения потенциалов.

Итак, в сложившейся ситуации можно закрыть либо вторую строку, либо второй столбец. Закроем вторую строку.

Далее берется клетка (3, 2), находится $x_{32} = \min(40,0) = 0$ и закрывается второй столбец.

В оставшейся части таблицы северо-западной клеткой будет клетка (3, 3). Полагается $x_{33} = \min(40,18) = 18$. Затем для клетки (3, 4) находится величина поставки $x_{34} = (22,22) = 22$. После осуществления этой поставки возникает ситуация одновременного удовлетворения потребности четвертого потребителя и полного распределения груза третьего поставщика. Закроем третью строку и перейдем к клетке (4, 4), находим $x_{44} = \min(33,0) = 0$. После записи нулевой поставки в клетку (4, 4) таблицы четвертый ее столбец автоматически закрывается.

Последней рассматривается клетка (4, 5), куда заносится объем поставки $x_{45} = \min(33,33) = 33$.

За $(p + q - 1)$ шагов метода находится опорный план.

Представленный в табл.3 опорный план содержит (4 + 5 –1) = 8 поставок, причем две из них нулевые поставки (план вырожденный).

Из самого способа построения опорного плана вытекает его сбалансированность по поставщикам и потребителям. Однако во избежание допущенных ошибок при вычислениях рекомендуется проверить все балансы путем суммирования поставок по строкам и столбцам.

Табл.3

a_i \ b_k	58	22	18	22	33
30	5 30	8	6	2	0
50	2 28	7 22	5	3	0
40	1	4 0	3 18	5 22	0
33	6	5	5	2 0	0 33

§ 3. Метод потенциалов

При построении опорного плана методом северо-западного угла никак не учитывалась экономическая целесообразность намеченных поставок, поэтому такой план с точки зрения транспортных расходов на его реализацию может быть весьма далек от оптимального. Как правило, его можно значительно улучшить. Оптимизацию начального опорного плана следует осуществить методом потенциалов. На каждой итерации этого метода выполняются следующие процедуры:

— вычисление потенциалов, согласованных с найденным опорным планом поставок;
— проверка плана на оптимальность с помощью потенциалов;
— улучшение плана в случае его неоптимальности.

3.1. Вычисление потенциалов, согласованных с опорным планом поставок

Потенциалы u_i поставщиков и v_j потребителей находятся из уравнений вида $v_j - u_i = c_{ij}$.

Такие уравнения составляются для всех занятых поставками клеток таблицы, т.е. общее число уравнений в системе равно (p + q – 1), количество же неизвестных в системе равно (p + q), т.е. на единицу больше числа уравнений. Такая система имеет множество решений, отличающихся друг от друга на некоторую константу.

Для оптимизации годится любое решение. Для того, чтобы найти какую-нибудь систему потенциалов, согласованную с планом, достаточно зафиксировать произвольным образом значение одного из потенциалов. Все остальные потенциалы после этого определяются однозначно из системы уравнений.

Для определенности примем, что $u_1 = 10$. Тогда все остальные потенциалы можно будет найти, решив систему уравнений:

$v_1 - u_1 = 5$, $v_2 - u_2 = 7$, $v_3 - u_3 = 3$, $v_4 - u_4 = 2$,

$v_1 - u_2 = 2$, $v_2 - u_3 = 4$, $v_4 - u_3 = 5$, $v_5 - u_4 = 0$.

Имеем $v_1 = 15$, $u_2 = 13$, $v_2 = 20$, $u_3 = 16$, $v_3 = 19$, $v_4 = 21$, $u_4 = 19$, $v_5 = 19$.

Заметим, что система чисел u_i и v_j определяется с точностью до постоянного слагаемого. Если бы мы задались другими значением u_1, то получили бы другую систему чисел u_i и v_j. Также можно было задаться значением не u_i, а любого другого неизвестного.

Добавим к табл.3 столбец справа для потенциалов u_i поставщиков и строку снизу для потенциалов v_j потребителей.

В последней клетке табл. $\widetilde{3}$ будем записывать сумму транспортных расходов. Обозначим для начального плана поставок суммарные затраты на перевозки через S_0. Тогда $S_0 = 5\times 30 + 2\times 28 + 7\times 22 + 3\times 18 + 5\times 22 = 524.$

При практическом определении потенциалов необязательно выписывать на каждой итерации соответствующую систему уравнений. Можно находить потенциалы непосредственно по таблице, не выписывая в явном виде систему.

Предположим, что известен какой-нибудь потенциал. Возможны два случая.

Случай 1. Известный потенциал относится к строке (поставщику). Тогда по данному потенциалу и по занятым клеткам этой строки (а в каждой строке и столбце обязательно есть хотя бы одна занятая клетка) можно определить потенциалы тех столбцов (потребителей), которым принадлежат рассматриваемые занятые клетки.

Потенциалы потребителей определяются по формуле $v_j = u_i + c_{ij}$, где u_i – известный потенциал поставщика, а c_{ij} – тариф, стоящий в занятой клетке.

Случай 2. Известен потенциал какого-либо столбца. Тогда по занятым клеткам этого столбца определяются потенциалы строк, соответствующие этим клеткам, по формуле $u_i = v_j - c_{ij}$.

Процесс вычисления с помощью этих двух правил можно организовать следующим образом. Выбирается какая-нибудь строка (столбец) в таблице. Потенциал выбранной строки полагается равным произвольному числу, и, руководствуясь правилом 1, находятся потенциалы всех столбцов, соответствующих занятым клеткам выбранной строки. Затем просматриваются столбцы с найденными потенциалами, и по занятым в них клеткам определяются по правилу 2 потенциалы новых строк.

Табл. $\tilde{3}$

a_i \ b_j	58	22	18	22	33	u_i
30	– 5 30	8	6	2	+ 0	10
50	+ 2 28	– 7 22	5	3	0	13
40	1	+ 4 0	3 18	– 5 22	0	16
33	6	5	5	+ 2 0	– 0 33	19
v_j	15	20	19	21	19	524

Процесс продолжается до тех пор, пока не будут использованы все занятые клетки и найдены тем самым все потенциалы.

Применяя описанный способ к решению рассмотренной выше системе уравнений, процесс вычислений будет выглядеть следующим образом.

Выбираем первую строку и полагаем $u_1 = 10$. В этой строке одна занятая клетка, расположенная в первом столбце. Следовательно, можно найти потенциал v_1 по формуле $v_1 = u_1 + c_{11} = 10 + 5 = 15$. Просматривая первый столбец, находим в нем занятую клетку (2, 1), неиспользованную еще для нахождения потенциалов. С ее помощью находим потенциал $u_2 = v_1 - c_{21} = 15 - 2 = 13$. С помощью $u_2 = 13$ и клетки (2, 2) находим $v_2 = u_2 + c_{22} = 13 + 7 = 20$ и т.д.

3.2. Проверка плана на оптимальность

Пусть определены потенциалы, согласованные с некоторым опорным планом. Они удовлетворяют условию (5) критерия оптимальности плана поставок в транспортной задаче. Следовательно, для того, чтобы узнать, оптимален анализируемый план или нет, нужно проверить, удовлетворяют ли эти потенциалы условию (6). Это равносильно проверке условий $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток.

Обозначим $\Delta_{ij} = v_j - c_{ij} - u_i$, тогда критерий оптимальности опорного плана может быть сформулирован так: *опорный план поставок оптимален тогда и только тогда, когда потен-*

циалы, согласованные с ним, удовлетворяют условию $\Delta_{ij} \le 0$*, где (i, j) – свободные клетки таблицы.*

Из этого критерия вытекает, что если для некоторой свободной клетки (i_0, j_0) величина $\Delta_{i_0 j_0} > 0$, то план перевозок не оптимален и его можно улучшить. По своему экономическому смыслу величина Δ_{ij} характеризует то изменение в суммарных транспортных расходах, которое произойдет из-за осуществления единичной поставки *i*-м поставщиком *j*-му потребителю. Если $\Delta_{ij} > 0$, то единичная поставка приведет к экономии в транспортных расходах, если же $\Delta_{ij} < 0$ – к увеличению. Следовательно, если среди свободных направлений поставок нет экономящих транспортные расходы направлений, то полученный план поставок оптимален.

Возвратимся к табл. $\widetilde{3}$ и с ее помощью вычислим величины Δ_{ij} для свободных клеток. Имеем

$$\Delta_{12} = v_2 - c_{12} - u_1 = 20 - 8 - 10 = 2$$

$$\Delta_{13} = v_3 - c_{13} - u_1 = 19 - 6 - 10 = 3$$

$$\Delta_{14} = v_4 - c_{14} - u_1 = 21 - 2 - 10 = 9$$

$$\Delta_{15} = v_5 - c_{15} - u_1 = 19 - 0 - 10 = 9$$

$$\Delta_{23} = v_3 - c_{23} - u_2 = 19 - 5 - 13 = 1$$

$$\Delta_{24} = v_4 - c_{24} - u_2 = 21 - 3 - 13 = 5 \qquad (6)$$

$$\Delta_{25} = v_5 - c_{25} - u_2 = 19 - 9 - 13 = 6$$

$$\Delta_{31} = v_3 - c_{31} - u_1 = 15 - 1 - 16 = -2$$

$$\Delta_{35} = v_5 - c_{35} - u_3 = 19 - 0 - 16 = 3$$

$$\Delta_{41} = v_4 - c_{41} - u_1 = 15 - 6 - 19 = -10$$

$$\Delta_{42} = v_4 - c_{42} - u_2 = 20 - 5 - 19 - 4$$

$$\Delta_{43} = v_4 - c_{43} - u_3 = 19 - 5 - 19 = -5.$$

Условие оптимальности нарушается для многих клеток, поэтому найденный план неоптимален.

3.3. Улучшение плана поставок

Среди положительных величин Δ_{ij} выбирается максимальная. В нашем случае величины $\Delta_{14} = 9$ и $\Delta_{15} = 9$ являются максимальными. Выбирается какая-нибудь одна из них, например, величина Δ_{15}. Клетка (1, 5) помечается знаком «+» в левом верхнем углу. Эта клетка в следующей таблице будет занята поставкой. Одновременно с занятием новой клетки происходит освобождение одной из занятых планом клеток. Удаляемая из плана поставка определяется с помощью цикла.

Циклом *называется набор клеток таблицы, которые могут быть соединены замкнутой ломаной линией, удовлетворяющей следующим двум условиям:*

1. *Любое звено ломаной находится в строке либо в столбце таблицы;*

2. *Никакие два звена ломаной не могут находиться в одной строке или в одном столбце таблицы.*

Смотрим, с какой занятой клеткой первой строки или пятого столбца можно соединить клетку (1, 5). Построим цикл, двигаясь от клетки (1, 5), например, по часовой стрелке.

В пятом столбце имеется единственная занятая клетка (4, 5), с которой можно соединить клетку (1, 5). Следующее звено ломаной должно находиться в четвертой строке. Так как в этой строке тоже единственная занятая клетка (4, 4), то ее следует соединить с клеткой (4, 5). Очередное звено ломаной должно находиться в четвертом столбце таблицы – это будет звено, соединяющее клетки (4, 4) и (3, 4).Следующее звено должно находиться в третьей строке, а в ней две занятые клетки. Для отыскания нужной клетки применяется метод проб и ошибок. Попробуем соединить клетки (3, 4) и (3, 3). Так как в одной строке таблицы не может быть более одного звена ломаной, то следующее звено должно быть расположено после такого соединения в третьем столбце таблицы. Однако в третьем столбце нет больше занятых клеток, поэтому таким путем нельзя замкнуть ломаную. Клетка (3, 3), следовательно, является тупиковой и ее не следует соединять с клеткой (3, 4). Остается единственная возможность – соединить клетку (3, 4) с занятой клеткой (3, 2). Далее процесс построения цикла пойдет однозначно.

Следующее звено должно находиться во втором столбце, поэтому соединяем клетки (3, 2) и (2, 2). Затем в цикл войдут клетки (2, 1) и (1, 1). Соединяя клетки (1, 1) и (1, 5), ломаная линия замыкается.

Начиная с клетки (1, 5) обойдем клетки цикла в каком-либо одном направлении (например, по часовой стрелке), отмечая их попеременно знаками плюс и минус. В клетках, помеченных знаком минус, находим минимальную поставку, которую обозначим через θ.

В нашем примере четыре минусовых клетки в цикле – это клетки (4, 5), (3, 4), (2, 2) и (1, 1). Минимальная поставка находится в двух клетках: (2, 2) и (3, 4), т.е. $\theta = x_{22} = x_{34} = 22$.

Переходим к новому плану поставок $\{x_{ij}^{нов}\}$ путем корректировки старого плана по следующим формулам:

$$x_{ij}^{нов} = \begin{cases} x_{ij}^{стар} + \theta, \text{ } если\ (i, j) - плюсовая\ клетка\ цикла; \\ x_{ij}^{стар} - \theta, \text{ } если\ (i, j) - минусовая\ клетка\ цикла; \\ x_{ij}^{стар}, \text{ } если\ (i, j) - не\ принадлежит\ циклу. \end{cases} \quad (7)$$

Корректировку плана лучше начинать с перераспределения поставок в клетках цикла, добавляя к поставкам в плюсовых клетках цикла величину θ и вычитая её из поставок в минусовых клетках.

При этом рекомендуется обходить клетки цикла последовательно, в одном направлении, начиная с новой занимаемой клетки (1, 5). В табл.4 представлен новый план.

Следует отметить, что если минимальная поставка находится одновременно в нескольких минусовых клетках цикла, то при переходе к новому опорному плану освобождается только одна из них, а остальные остаются занятыми нулевыми поставками. Так, при переходе от табл. $\tilde{3}$ к табл.4 освободилась клетка (2, 2), а другая клетка с минимальной поставкой – клетка (3, 4) – осталась занятой. В табл.4 по-прежнему остается восемь занятых клеток.

Табл. 4

a_i \ b_j	58	22	18	22	33	u_i
30	– 5 8	8	6	2	+ 0 22	10
50	2 50	7	5	3	0	13
40	+ 1	4 22	3 18	– 5 0	0	7
33	6	5	5	+ 2 22	– 0 11	11
v_j	15	11	10	12	10	326

Суммарные транспортные расходы на новый план поставок могут быть получены путем корректировки суммы транспортных расходов на прежний план по формуле:

$$S_1 = S_0 - \Delta_{15} \cdot \theta \qquad (8)$$

Получим, что $S_1 = 524 - 9 \times 22 = 326$.

На этом полностью заканчивается одна итерация метода оптимизации. Далее процесс продолжается аналогичным образом.

Перейдем ко второй итерации. Проверяем план на оптимальность. Находим потенциалы, согласованные с полученным планом табл.4. Пусть $u_1 = 10$, тогда по занятым клеткам находим

$v_1 = 10 + 5 = 15$, $v_2 = 7 + 4 = 11$, $v_4 = 10 + 2 = 12$,

$v_2 = 15 - 2 = 13$, $u_4 = 10 - 0 = 10$, $v_5 = 10 + 0 = 10$,

$v_3 = 7 + 3 = 10$, $u_3 = 12 - 5 = 7$.

Считаем величины Δ_{ij} для свободных клеток.

$\Delta_{12} = 11 - 8 - 10 = -7$,

$\Delta_{13} = 10 - 6 - 10 = -6$,

$\Delta_{14} = 12 - 2 - 10 = 0$,

$\Delta_{22} = 11 - 7 - 13 = -9$,

$\Delta_{23} = 10 - 5 - 13 = -8$,

$\Delta_{24} = 12 - 3 - 13 = -4$,

$\Delta_{25} = 10 - 0 - 13 = -3$,

$\Delta_{31} = 15 - 1 - 7 = 7$,

$\Delta_{35} = 10 - 0 - 7 = 3$,

$\Delta_{41} = 15 - 6 - 10 = -1$,

$\Delta_{42} = 11 - 5 - 10 = -4$,

$\Delta_{43} = 10 - 5 - 10 = -5$

План не оптимален, так как среди величин Δ_{ij} имеются положительные. Находим $\max\Delta_{ij} = \Delta_{31} = 7$.

Табл. 5

a_i \ b_j	58	22	18	22	33	u_i
30	– 5 8	8	6	2	+ 0 22	15
50	2 50	7	5	3	0	18
40	+ 1 0	– 4 22	3 18	– 5	0	19
33	6	+ 5	5	2 22	– 0 11	15
v_j	20	23	22	17	15	326

Клетку (3, 1) отмечаем знаком плюс и находим цикл. Минимальная поставка в минусовых клетках цикла равна $\theta = \min(8{,}0{,}11) = 0$. Клетка (3, 1) при переходе к новой табл.5 занимается в данном случае нулевой поставкой, а клетка (3, 4), соответствующая минимальной поставке, освобождается. Так как

$\theta = 0$, то новый план поставок совпадает со старым. Транспортные расходы по новому плану также останутся прежними, т.е. $S_2 = 326$. Однако потенциалы изменятся.

Выполним третью итерацию. Вычислим потенциалы, полагая $v_1 = 20$. Находим величины Δ_{ij} для свободных клеток табл.5.

$$\begin{aligned}
&\Delta_{12} = 23 - 8 - 15 = 0,\\
&\Delta_{13} = 22 - 6 - 15 = 1,\\
&\Delta_{14} = 17 - 2 - 15 = 0,\\
&\Delta_{22} = 23 - 7 - 18 = -2,\\
&\Delta_{23} = 22 - 5 - 18 = -1,\\
&\Delta_{24} = 17 - 3 - 18 = -4,\\
&\Delta_{25} = 15 - 0 - 18 = -3,\\
&\Delta_{34} = 17 - 5 - 19 = -7,\\
&\Delta_{35} = 15 - 0 - 19 = -4,\\
&\Delta_{41} = 20 - 6 - 15 = -1,\\
&\Delta_{42} = 23 - 5 - 15 = 3,\\
&\Delta_{43} = 22 - 5 - 15 = 2
\end{aligned}$$

Так как $\max\Delta_{ij} = \Delta_{42} = 3 > 0$, то план неоптимален. Отмечаем клетку (4, 2) знаком плюс и строим цикл, который в данном случае образуют клетки (4, 2), (3, 2), (3, 1), (1, 1), (1, 5) и (4, 5). Находим величину $\theta = \min(8,11,22) = 8$, новые поставки и сумму затрат $S_3 = S_2 - \Delta_{42} \cdot \theta = 326 - 3 \times 8 = 302$ заносим в табл.6.

Табл. 6

b_j / a_i	58	22	18	22	33	u_i
30	5 8	8	6	2	0 30	9
50	2 50	7	5	3	0	9
40	1 8	4 14	3 18	5	0	10
33	6	5 8	5	2 22	0 3	9
v_j	11	14	13	11	9	302

Выполним четвертую итерацию. Находим новую систему потенциалов, согласованную с полученным планом, полагая $u_3 = 10$. Проверяем план на оптимальность:

$$\Delta_{11} = 11 - 5 - 9 = -3,$$
$$\Delta_{12} = 14 - 8 - 9 = -3,$$
$$\Delta_{13} = 13 - 6 - 9 = -2,$$
$$\Delta_{14} = 11 - 2 - 9 = 0,$$
$$\Delta_{22} = 14 - 7 - 9 = -2,$$
$$\Delta_{23} = 13 - 5 - 9 = -1,$$
$$\Delta_{24} = 11 - 3 - 9 = -1,$$
$$\Delta_{25} = 9 - 0 - 9 = 0,$$
$$\Delta_{34} = 11 - 5 - 10 = -4,$$
$$\Delta_{35} = 9 - 0 - 10 = -1,$$
$$\Delta_{41} = 11 - 6 - 9 = -4,$$
$$\Delta_{43} = 13 - 5 - 9 = -1$$

Все $\Delta_{ij} \le 0$. Следовательно, получен оптимальный план.

При этом $S^* = 302$, $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 22 & 3 \end{pmatrix}$

ГЛАВА 6

Теория игр

§ 1. Общие сведения

Прежде чем перейти непосредственно к решению задачи, дадим некоторые основные сведения и понятия из теории матричных игр.

Матричной игрой *называется модель конфликтной ситуации, в которой участвуют два лица, называемые игроками. Игра ведется по определенным правилам, в соответствии с которыми каждый игрок принимает определенные действия (ходы, стратегии).*

В матричной игре заданы конечные множества *чистых стратегий* обоих игроков $\{1, ..., m\}$ и $\{1, ..., n\}$.

Каждой чистой стратегии игрока I (первого игрока) ставится в соответствие строка матрицы, а чистой стратегии игрока II (второго игрока) – ее столбец. Элемент этой матрицы a_{ij} характеризует платеж игроку I игроком II в ситуации (i, j), т.е. когда игрок I выбрал i–ю свою стратегию, а игрок II - j-ю стратегию.

Матрица A называется поэтому *платежной матрицей* игры или матрицей выигрышей игрока I. Если элемент a_{ij} положителен, то он показывает выигрыш игрока I (проигрыш игрока

II) в ситуации *(i, j)*, если же элемент a_{ij} отрицателен, то это означает проигрыш игрока I (выигрыш игрока II).

Игра может быть многоходовой (состоящей из многих партий). В этом случае результаты игры оцениваются *средним выигрышем* за одну партию, т.е. суммарный выигрыш делится на количество сыгранных партий.

Целью каждого игрока является такое поведение в игре, которое гарантирует ему наибольший ожидаемый выигрыш при достаточно большом количестве партий. Такое поведение игрока называют *оптимальной стратегией.*

В многоходовой игре игроки применяют различные свои чистые стратегии, причем некоторые из них чаще (в большем числе партий), другие реже. Поведение игрока, при котором он определенной частотой или вероятностью случайно чередует все свои чистые стратегии, называется *смешанной стратегией.*

Обозначим смешанную стратегию игрока I

$$p = (p_1, \ldots, p_m), \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ p_i \geq 0, \ i=1, \ldots, m,$$

а смешанную стратегию игрока II

$$q = (q_1, \ldots, q_n), \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \ q_j \geq 0, \ j=1, \ldots, n,$$

где p_i – вероятность выбора игроком I *i*-й своей чистой стратегии;

q_j – вероятность выбора игроком II j-й своей чистой стратегии.

Результаты использования смешанных своих стратегий p и q оцениваются с помощью *функции выигрыша* (платежной функции)

$$E(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j, \qquad (1)$$

выражающей математическое ожидание выигрыша I игрока и соответственно проигрыша игрока II.

Любая смешанная игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях. Лишь в некоторых случаях оптимальное решение игры возможно в чистых стратегиях, когда оба игрока применяют в каждой партии одну и ту же свою стратегию (точнее, принимают одну чистую стратегию с единичной вероятностью, а остальные с нулевой вероятностью). Такое может быть только в играх с платежными матрицами, обладающими специальным свойством – имеющим *седловую точку.* Седловой точкой матрицы $A=(a_{ij})$, $i=1,\ldots, m, j=1,\ldots, n$ называется такая пара (i_0, j_0) номеров строки и столбца, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$a_{ij_0}\le a_{i_0j_0}\le a_{i_oj},\ i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n \qquad (2)$$

Из неравенств $a_{i_0j_0}\le a_{i_0j}$, $j=1,\ldots, n$ следует, что элемент $a_{i_0j_0}$ является наименьшим в i_0 строке, а из неравенств

$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0}$, $i=1,\ldots, m$ вытекает, что этот же элемент $a_{i_0 j_0}$ является наибольшим в j_0 столбце.

В случае существования седловой точки (i_0, j_0) у платежной матрицы A оптимальное решение игры будет состоять в применении игроком I i_0-й чистой стратегии, а игроком II j_0-й своей стратегии. Элемент $a_{i_0 j_0}$ в этом случае будет равен оптимальному выигрышу одного и проигрышу другого игрока, т.е. определять *цену игры.*

Так как большинство платежных матриц не имеет седловых точек, то оптимальные стратегии игроков в соответствующих им играх являются смешанными. Так как чистая стратегия i_0 является частным случаем смешанной стратегии ($p_{i_0} = 1$, а остальные компоненты $p_i = 0$), то в смешанных стратегиях разрешима любая матричная игра.

Оптимальные стратегии игроков взаимно уравновешивают друг друга (являются *равновесными*). Каждому игроку оказывается невыгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии. Если же какой-либо игрок отклонится от своей оптимальной стратегии, то его средний выигрыш, оцениваемый функцией (1), может стать меньшим (проигрыш большим).

Рассматриваемые в матричной игре оптимальные стратегии игроков характеризуют осторожное поведение игроков, не допускающее риска. Первый игрок старается себя вести так, чтобы получить в максимальном размере гарантированный выигрыш. Так как гарантированный выигрыш игрока I при выборе им стратегии p определяется величиной

$$\alpha(p) = \min_q E(p,q), \tag{3}$$

то игрок I решает задачу о выборе такой стратегии p^*, при которой величина $\alpha(p)$ будет наибольшей:

$$\alpha(p^*) = \max_p \alpha(p) = \max_p \min_q E(p,q) \tag{4}$$

Стратегия p^*, определяемая формулой (4), называется максиминной стратегией игрока I, а величина $\alpha(p^*)$ – нижней ценой игры.

Следуя принципу осторожности, игрок II стремится выбрать такую стратегию, при которой возможный его проигрыш будет как можно меньше. Если обозначить через

$$\beta(q) = \max_p E(p,q), \tag{5}$$

то задача игрока II состоит в выборе такой стратегии q^*, при которой величина $\beta(q)$ будет минимальной:

$$\beta(q^*) = \min_q \max_p E(p,q) \tag{6}$$

Стратегия q^*, определяемая (6), называется минимаксной, а величина $\beta(q^*)$ – верхней ценой игры.

Для оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* всегда имеет место равенство $\alpha(p^*) = \beta(q^*)$, т.е.

$$\max_p \min_q E(p,q) = \min_q \max_p E(p,q) = E(p^*, q^*), \tag{7}$$

а величина $E(p^*, q^*) = v$ называется ценой игры.

Если же максимин и минимакс функции $E(p, q)$ находить не на всех смешанных стратегиях игроков, а только на чистых их стратегиях, то нижняя цена игры α и верхняя цена β удовлетворяют неравенству $\alpha \le \beta$, причем равенство имеет место для платежных матриц с седловой точкой.

Проиллюстрируем решение матричной игры на конкретном примере, с заданной платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Составим следующую таблицу .

i \ j	1	2	3	4	α_I
1	2	1	5	4	1
2	1	3	–1	4	–1
β_j	2	3	5	4	$\alpha =$ $\beta =$

В ней приведены числа $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ – минимально возможный (гарантированный) выигрыш игрока I при выборе им i-й чистой стратегии и $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ – максимально возможный проигрыш игрока II при выборе им j стратегии.

Число $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$ – нижняя цена игры (максимин), $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$ – верхняя цена игры (минимакс).

Имеем $\alpha_1 = \min(2,1,5,4) = 1$, $\alpha_2 = \min(1,3,-1,4) = -1$, $\alpha = \max(1,-1)$, $\beta_1 = \max(2,1) = 2$, $\beta_2 = \max(1,3) = 3$, $\beta_3 = \max(5,-1) = 5$, $\beta_4 = \max(4,4) = 4$, $\beta = \min(2,3,5,4) = 2$.

Так как $\alpha < \beta$, поэтому седловой точки у данной матрицы нет, и следовательно, игра не имеет оптимального решения в чистых стратегиях.

Найдем оптимальное решение матричной игры двумя способами: графически и путем сведения игры к задаче линейного программирования.

§ 2. Графический способ решения матричной игры

Графически решаются задачи в случае, когда у одного из игроков всего лишь две чистые стратегии. В рассматриваемом примере у игрока I две стратегии, а у игрока II – четыре стратегии.

Игроку I нужно определить свою оптимальную (максиминную) стратегию $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, а игроку II – оптимальную (минимаксную) стратегию $q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$, необходимо также определить цену игры v, показывающую ожидаемый средний выигрыш игрока I и, соответственно, проигрыш игрока II при оптимальном их поведении.

Графически решается задача игрока, имеющего две стратегии, т.е. в нашем случае задача игрока I. Оптимальная стратегия игрока II находится аналитическим путем после решения задачи игрока I.

Максиминная стратегия игрока I в соответствии с формулой (4) находится путем решения следующей задачи игрока I:

$$\alpha(p) = \min_q E(p,q) \to \max_p$$

Идея метода состоит в том, что функция $\alpha(p) = \min_q E(p,q)$, показывающая минимальные (гарантированные) выигрыши игрока I при всевозможных его смешанных стратегиях p, строится графически. График этой функции называется *нижней границей* выигрышей игрока I. Затем на нижней границе находится точка, соответствующая максимальному выигрышу игрока I.

Графические построения осуществляются следующим образом. На горизонтальной прямой берется отрезок единичной длины. Каждой точке этого отрезка сопоставляется смешанная стратегия $p = (p_1, p_2)$ игрока I по следующему правилу: p_1 – это расстояние от точки до правого конца отрезка, а p_2 – расстояние от точки до левого конца отрезка (см. рис.2).

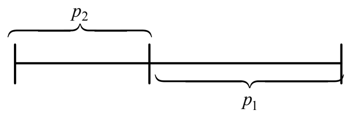


Рис.2

Любой смешанной стратегии игрока I на единичном отрезке будет отвечать некоторая единственная точка, построенная по указанному правилу. Таким образом, между точками отрезка и смешанными стратегиями игрока I устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Далее, к концам единичного отрезка проводятся две вертикальные прямые. На левой вертикальной прямой откладываются выигрыши игрока I, соответствующие первой его чистой стратегии (значения элементов первой строки платежной матрицы A), а на правой вертикальной прямой – выигрыши, соответствующие второй стратегии (значения элементов второй строки матрицы A). Положительные значения элементов откладываются на прямых вверх, а отрицательные – вниз. Точки, соответствующие элементам одного столбца матрицы (стратегии игрока II) соединяются отрезками с указанием их номеров (номеров соответствующих столбцов) (см.рис.3).

На рис.3 четыре отрезка, соответствующие четырем чистым стратегиям игрока II.

Находим теперь нижнюю границу выигрышей игрока I в виде ломаной линии, огибающей снизу все эти отрезки. Эта граница показана на рисунке жирной линией.

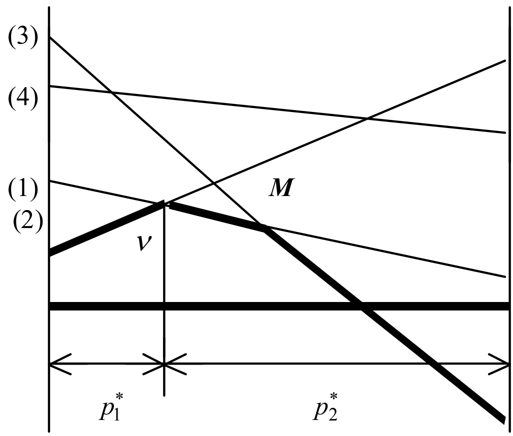


Рис.3

Расстояние от любой точки, расположенной на границе, до ближайшей точки $p = (p_1, p_2)$ единичного отрезка, взятое с учетом знака (плюс, если эта точка расположена выше единичного отрезка и со знаком минус, если она находится ниже единичного отрезка), характеризует тот выигрыш, который гарантирован игроку I в случае выбора им смешанной стратегии $p = (p_1, p_2)$.

Другими словами, это расстояние совпадает с величиной $\alpha(p)$, к максимизации которой стремится игрок I.

Решение задачи игрока I сводится , таким образом, к отысканию на нижней границе его выигрышей точки, соответствующей наибольшему выигрышу, т.е. наиболее удаленной точки отрезка.

На рис.3 это будет точка M, находящаяся на пересечении первого и второго отрезков. Первая и вторая чистые стратегии игрока II называются *активными*, и он их должен использовать в своей оптимальной стратегии q^* с ненулевой вероятностью. Третий и четвертый отрезки не проходят через точку M, поэтому третья и четвертая стратегии, наоборот, называются пассивными – игрок II не должен их использовать в оптимальной стратегии.

Далее определяются графически цена игры v как расстояние от точки M до единичного отрезка (взятое с учетом знака) и оптимальная смешанная стратегия $p^* = (p_1^*, p_2^*)$. Так как графическое определение числовых значений этих величин является довольно грубым, то следует уточнить их аналитическим путем решения системы линейных уравнений. Прежде сформулируем теорему, из которой вытекает эта система.

Теорема. *Если один из игроков применяет в игре свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v независимо от того, с какими вероятностями второй игрок будет применять свои активные стратегии.*

Из этой теоремы вытекает, что, применяя в игре оптимальную свою стратегию $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, игрок I получит выигрыш, равный цене игры v, и в этом случае, когда игрок II применит либо первую свою чистую стратегию, либо вторую стратегию, так как обе стратегии являются активными. Выпишем функцию выигрыша $E(p, q)$ для нашего примера

$$\begin{aligned} E(p,q) = 2p_1q_1 + p_1q_2 + 5p_1q_3 + 4p_1q_4 + \\ + p_2q_1 + 3p_2q_2 - p_2q_3 + 4p_2q_4 \end{aligned} \tag{8}$$

и найдем ее значения в двух точках:

1. $p = p^*$, $q = e_1 = (1,0,0,0)$;

2. $p = p^*$, $q = e_2 = (0,1,0,0)$

Получим $E(p^*, e_1) = 2p_1^* + p_2^*$, $E(p^*, e_2) = p_1^* + 3p_2^*$. Приравнивая эти значения к цене игры v и добавляя нормирующее уравнение $p_1^* + p_2^* = 1$, получим следующую систему линейных уравнений для определения вектора $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ и величины v:

$$\begin{aligned} 2p_1^* + p_2^* &= v, \\ p_1^* + 3p_2^* &= v, \\ p_1^* + p_2^* &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Решив полученную систему, находим $p_1^* = 2/3$, $p_2^* = 1/3$, $v = 5/3$.

Найдем теперь оптимальную стратегию игрока II. Как уже отмечалось, третья и четвертая стратегии его являются пассивными, поэтому $q_3^* = q_4^* = 0$. Остальные компоненты вектора q^* находятся аналитическим путем решения системы уравнений, составляемых также на основе приведенной теоремы. У игрока I активными являются обе его стратегии. Вычислим значение функции $E(p, q)$, определяемой формулой (8) в двух точках:

1. $p = e_1 = (1,0)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, 0, 0)$;

2. $p = e_2 = (0,1)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, 0, 0)$

и приравняем их v. Получим $E(p,q)=2q_1^*+q_2^*$, $E(p,q)=q_1^*+3q_2^*$.

$$
\begin{aligned}
&2q_1^* + q_2^* = v,\\
&q_1^* + 3q_2^* = v, \qquad (10)\\
&q_1^* + q_2^* = 1
\end{aligned}
$$

Так как значение v уже известно, то для определения неизвестных достаточно взять какие-либо два уравнения этой системы. Возьмем, например, первое и третье уравнения:

$$
\begin{aligned}
&2q_1^* + q_2^* = v,\\
&q_1^* + q_2^* = 1
\end{aligned}
$$

откуда находим $q_1^* = 2/3$, $q_2^* = 1/3$.

В итоге получены следующее оптимальное решение игры и ее цена:

$$p^* = (2/3\,,1/3)\,,$$

$$q^* = (2/3, 1/3\,, 0, 0),$$

$$v = 5/3$$

Замечание. При практическом составлении систем уравнений (9) и (10) для нахождения оптимальных стратегий игроков использованы лишь два столбца матрицы A, соответствующие активным стратегиям игрока II, т.е. матрица $\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}$

При составлении системы уравнений для игрока I столбцы этой матрицы умножаются скалярно на столбец неизвестных $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, а при составлении системы для игрока II строчки этой матрицы скалярно умножаются на строку неизвестных (q_1, q_2).

Ниже показаны некоторые из возможных случаев, которые могут встретиться при графическом решении игры.

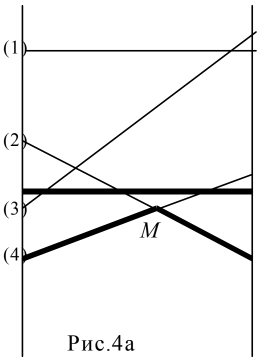


Рис.4а

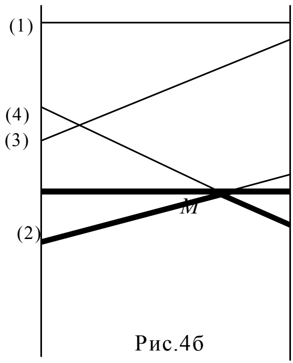


Рис.4б

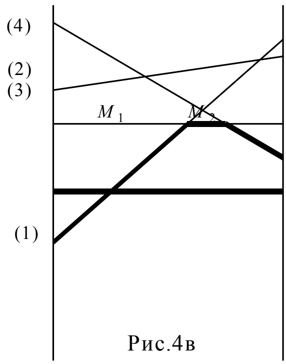


Рис.4в

На рис.4а точка M ниже единичного отрезка, поэтому цена игры v будет отрицательной. На рис.4б показана игра с нулевой ценой, а на рис.4в игра имеет множество оптимальных решений. Любой точке отрезка M_1M_2 нижней границы отвечает оптимальная смешанная стратегия игрока I.

§ 3. Линейно-программный способ решения матричной игры

Линейно-программный метод решения матричной игры основывается на эквивалентности матричной игры и задачи линейного программирования.

Любая матричная игра может быть сведена к задаче линейного программирования, прямое и двойственное решения которой определяют оптимальное решение игры и, наоборот, всякой задаче линейного программирования можно сопоставить игру так, что оптимальные стратегии игроков дадут решения исходной задачи и двойственной к ней. Покажем, что матричная игра сводится к задаче линейного программирования.

Вспомним задачу игрока I, $\alpha(p) \to \max\limits_{p}$, где $\alpha(p)$ – наименьший (гарантированный) выигрыш игрока I, соответствующий стратегии p.

Пусть игрок I выбирает смешанную стратегию p, а игрок II свою чистую j-ю стратегию, т.е. $q = e_j = (0,\ldots,1,\ldots 0)$, где единица стоит на j-м месте. Тогда выигрыш игрока I, подсчитанный по формуле (1), составит величину

$$E(p, e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad j = 1,\ldots,n \tag{11}$$

Так как $\alpha(p) = \min\limits_{q} E(p, q)$, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq \alpha(p), \quad j = 1,\dots,n \tag{12}$$

и игрок I в условиях (12) будет стремиться избрать такую стратегию при которой величина $\alpha(p)$ будет максимальной.

Задачу игрока I можно преобразовать следующим образом. Предположим, что $\alpha(p) > 0$. Разделив левую и правую части каждого неравенства (12) на $\alpha(p)$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i}{\alpha(p)} \geq 1, \quad j = 1,\dots,n$$

Введем неотрицательные неизвестные $u_i = \dfrac{p_i}{\alpha(p)}$, $i = 1,\dots,m,$ сумма которых $\omega = \sum_{i=1}^{v} u_i = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{p_i}{\alpha(p)} = \dfrac{1}{\alpha(p)}$ – величина, обратная величине $\alpha(p)$. Тогда задача игрока I может быть записана в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1,\\
&u_i \geq 0,\\
&j = 1,\dots,n, i = 1,\dots,m,\\
&\omega = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min
\end{aligned} \tag{13}$$

Аналогичными рассуждениями можно свести задачу игрока II к следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 1,$$
$$x_j \ge 0, \qquad (14)$$
$$i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,$$
$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$$

Нетрудно видеть, что обе эти задачи являются двойственными друг к другу, и их оптимальные решения могут быть получены симплекс-методом одновременно.

Обозначим оптимальные решения задач (13) и (14) через $U^* = (u_i)^*$, $i = 1,\dots,m$, $X^* = (x_j)^*$, $j = 1,\dots,n$, а оптимальные значения целевых функций $\omega^* = z^*$. Тогда оптимальные стратегии игроков p^* и q^* и цена игры v определяются по формуле

$$p^* = \frac{1}{\omega^*}\cdot U^*,\ q^* = \frac{1}{z^*}\cdot X^*,\ v = \frac{1}{\omega^*} = \frac{1}{z^*} \qquad (15)$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования проведено в предположении $\alpha(p) > 0$, что равносильно условию положительности цены игры ($v > 0$). Если игра имеет отрицательную цену, то описанный непосредственный переход к задаче линейного программирования с помощью платежной матрицы A не годится. В этом случае необходимо от исходной игры перейти к вспомогательной с заведомо положительной ценой путем добавления ко всем элементам платежной матрицы некоторого положительного числа a. Обозначим новую платежную матрицу $A' = (a'_{ij})$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n.$ Будем считать, что число выбрано таким, что все элементы $a'_{ij} = a_{ij} + a > 0$. Исходная игра с матрицей A и вспомогательной игры с матрицей A' имеют одно и тоже оптимальное решение (p^*, q^*), отличаются они лишь ценой игры. Цена v' вспомогательной игры и цена v исходной игры удовлетворяют равенству

$$v' = v + a \tag{16}$$

Итак, вернемся к нашему примеру.

Необходимо решить линейно-программным способом игру с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Добавим ко всем элементам матрицы A положительное число a=1, получим матрицу $A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда задачи I и II будут таковы:

$$\left.\begin{aligned} &3u_1 + 2u_2 \geq 1, \\ &2u_1 + 4u_2 \geq 1, \\ &6u_1 \qquad\;\; \geq 1, \\ &5u_1 + 5u_2 \geq 1, \\ &u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \\ &\omega = u_1 + u_2 \to \min \end{aligned}\right\} \qquad \text{Задача I}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad + 5x_4 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max \end{array}\right\} \qquad \text{Задача II}$$

Так как задача II имеет стандартную форму с положительным вектором ограничений, то для нее известен опорный план, и она может быть решена за один этап. Поэтому рекомендуется решать симплекс-методом задачу II, а решение задачи I получится как двойственное решение. Составляем начальную симплексную таблицу.

Табл. 0

	$v_1 =$ $-x_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$v_4 =$ $-x_4$	$\omega =$ 1
$u_1 y_1 =$	3	2	6	5	1
$u_2 y_2 =$	2	4	0	5	1
$1z =$	–1	–1	–1	–1	0

Преобразуем табл.0 относительно выбранного, по правилам симплекс-метода, разрешающего элемента, получим табл.1.

Табл. 1

	$v_1 =$ $-x_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$v_4 =$ $-x_4$	$\omega =$ 1
$u_1 y_1 =$	1/3	2/3	6/3	5/3	1/3
$u_2 y_2 =$	–2/3	8/3	–12/3	5/3	1/3
$1z =$	1/3	–1/3	1	2/3	1/3

$X = (1/3\,,0,0,0),\qquad Y = (0,1/3),\quad z = 1/3\,.$

$V = (0,-1/3\,,1,2/3),\quad U = (1/3\,,0),\quad \omega = 1/3\,.$

Решая задачу далее, получим табл.2.

Табл. 2

	$v_1 =$ $-x_1$	$v_2 =$ $-x_2$	$v_3 =$ $-x_3$	$v_4 =$ $-x_4$	$\omega =$ 1
$u_1 y_1 =$					2/8
$u_2 y_2 =$					1/8
1z =	2/8	1/8	½	7/3	3/8

Получены оптимальные решения задач I и II.

$X^* = (2/8\,,1/8\,,0,0),\quad Y^* = (0,0),\qquad z^* = 3/8.$

$V^* = (0,0,1/2\,,7/8),\quad U^* = (2/8\,,1/8),\ \ \omega^* = 3/8\,.$

Находим цену игры v и оптимальные стратегии игроков

$$v' = \frac{1}{z^*} = 8/3\,,\quad p^* = v'\cdot U^* = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{8},\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

$$q^* = v'\cdot X^* = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{8},\frac{1}{8},0,0\right) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,0\right).$$

Цена игры v исходной игры равна

$$v = v' - a = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}\,.$$

ГЛАВА 7
Моделирование процессов наилучшего использования ресурсов

§ 1. Математическая модель наилучшего использования ресурсов

Среди широкого спектра математических моделей в экономике особо выделяется класс оптимизационных моделей, порождаемый оптимальным подходом к исследуемым объектам и процессам. В основе оптимального подхода лежат объективные предпосылки, вытекающие из сущности процессов принятия решений и управления. Всякая оптимизационная модель базируется на трёх основных предположениях:

1) ограниченность ресурсов (средств) в производственной и непроизводственной сферах;
2) взаимозаменяемость ресурсов, обусловливающая многовариантность решения экономических проблем;
3) наличие критерия, позволяющего сравнивать различные экономические решения.

Понятие ресурса в концепции оптимального подхода трактуется очень широко. Под ресурсами понимаются труд, земля, материально-технические или финансовые средства, информация, форма организации и управленческая деятельность и все другое, что требуется при реализации рассматриваемых экономических решений.

По отношению к не воспроизводимым ресурсам можно говорить об абсолютной их ограниченности, а по воспроизводимым ресурсам – об относительной ограниченности в рассматриваемом промежутке времени.

В математической форме условия ограниченности ресурсов и их взаимозаменяемость могут быть записаны так:

$$g_i(x_1,\ldots x_n) \le b_i,\ i = 1,\ldots,m, \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad (2)$$

где x_j – показатель активности (интенсивности) j-го способа деятельности (выпуск продукции, загрузка оборудования, степень удовлетворения потребности, объем оказанных услуг и т.д.);

$g_i(x_1,\ldots x_n)$ – функции затрат i-го ресурса;

b_i – объем i-го ресурса.

Многовариатность экономических решений также отображается в форме условий (1). Она обусловливается взаимозаменяемостью ресурсов, различными способами их использования, что в модели отображается набором «способов производства» и с помощью вида функций g_i.

Один и тот же результат может быть получен различным путем. Например, сталь можно получить мартеновским и конвекторным способами (здесь происходит замена одного типа оборудования и технологии на другой), в качестве топлива могут использоваться дрова, уголь, нефть, электроэнергия и другое.

Следует отметить, что замена одного ресурса другим может происходить опосредованно через длинную цепочку прямых замен. Например, уголь может где-то заменить нефть, что создает условия использования этой нефти для получения синтетических волокон, что создает, в свою очередь, возможность снижения потребления хлопка, а следовательно освободит часть посевных площадей, которые могут быть использованы для других сельскохозяйственных культур. Наличие непосредственной или косвенной заменяемости ресурсов в экономических процессах обусловливает возникновение множества допустимых экономических решений, что приводит к проблеме выбора наиболее подходящего решения. Это достигается благодаря предпосылке или условию *3*. Условие *3* оптимизационной модели формализуется в виде

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \to \max \tag{3}$$

Наличие критерия оценки качества экономических решений – неотъемлемое условие в оптимальном подходе, причем современная концепция оптимального подхода допускает наличие не одного критерия (цели), а многих критериев. В последнем случае говорят о многокритериальной или многоцелевой оптимизации.

Задача (1) – (3) является задачей нелинейного программирования, частным случаем которого является линейное программирование.

Для различных экономических объектов (предприятий, фирм и т.д.) в качестве критериев оптимизации могут выступать различные показатели: прибыль, себестоимость продукции, валютная выручка, сумма кредитов, величина налогов, посреднические услуги и др. В условиях рыночной экономики все эти показатели играют роль при определении стратегии поведения и развития изучаемого экономического объекта.

Математическая модель (1) – (3) представляет собой задачу математического программирования. При достаточно разумных дополнительных гипотезах относительно функций $g_i(x_1,...,x_n)$ построена стройная математическая теория, устанавливающая основные свойства решений, известная под названием теории двойственности.

Эти гипотезы касаются области допустимых решений (ОДР), определяемой системой неравенств (1), (2) и целевой функции (3).

§ 2. Понятие двойственности, двойственные оценки и их применение в экономическом анализе

Теория двойственности позволяет не только строить эффективные алгоритмы поиска оптимальных решений, но и представляет богатый инструментарий для анализа внутренней структуры исследуемых экономических объектов и процессов, отображаемых с помощью математических моделей, а также для получения содержательных экономических выводов и обобщений. Понятие двойственности является фундаментальным в оптимизации, а двойственные оценки играют значительную роль в анализе экономических процессов.

Обозначим u_i – двойственную оценку i-го ресурса в задаче (1) – (3), а v_j – двойственную оценку j-го способа деятельности. Тогда условия исходной и двойственной задач и соответствие между ними представить следующим образом:

$$b_i - g_i(x_1,...,x_n) = y_i \geq 0 \leftrightarrow u_i \geq 0$$

$$x_j \geq 0 \leftrightarrow v_j = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{dg_i}{dx_j} - \frac{df}{dx_j} \geq 0$$

Для задач выпуклого программирования установлены необходимые и достаточные условия оптимальности прямого и двойственного решений (Теорема Куна-Таккера), которые применительно к задаче (1) – (3) в случае ее выпуклости можно сформулировать так.

Неотрицательные векторы $X = (x_1,...,x_n)$, $Y = (y_1,...,y_m)$, $U = (u_1,...,u_m)$, $V = (v_1,...,v_n)$ *оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия дополняющей нежесткости*

$$y_i u_i = 0, \; i = 1,...,m \tag{4}$$

$$x_j v_j = 0, \; j = 1,...,n \tag{5}$$

Если функции $g_i(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $f(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ линейные, то $\frac{dg_i(x_1,...,x_n)}{dx_j}=a_{ij}$, $\frac{df(x_1,...,x_n)}{dx_j}=c_j$ и условия (4), (5) принимают вид

$$\left(b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\cdot u_i=0$$

$$x_j\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i-c_j\right)=0$$

Условия дополняющей нежесткости определяют следующие свойства оптимальных решений в задаче наилучшего использования ресурсов:

1. *Если оптимальная оценка некоторого ресурса положительна ($u_i^*>0$), то такой ресурс полностью используется ($y_i^*=0$).*
2. *Если какой-то ресурс недоиспользуется в оптимальном решении ($y_i^*>0$), то его оценка равна нулю ($u_i^*=0$).*
3. *Если в оптимальном решении интенсивность какого-то вида деятельности (процесса) положительна ($x_j^*>0$), то суммарные затраты в этом процессе, исчисленные в оптимальных оценках, равны результатам ($v_j^*=0$).*

4. *Если сумма затрат по оптимальным оценкам u_i превосходит результаты для какого-то возможного процесса деятельности ($v_j^* > 0$), то такой процесс не используется в оптимальном решении ($x_j^* = 0$).*

Оптимальные оценки ресурсов в задачах оптимизации имеют четкую экономическую интерпретацию. Они являются количественной мерой предельной полезности или эффективности использования ресурсов и характеризуют абсолютный прирост оптимизируемого показателя z в случае увеличения объема этого ресурса на одну единицу.

Предположим, что происходит оптимизация прибыли от реализации некоторых изделий, производимых предприятием с использованием ограниченных ресурсов сырья и труда. Пусть в результате проведенных расчетов получена программа выпуска изделий, дающая наибольшую прибыль предприятию, и найденные оптимальные оценки сырья u_1 = 50 р/кг и труда u_2 = 100 р/чел.-ч.

Напомним, что единицы измерения двойственных оценок определяются по формуле $[u_i] = \frac{[Z]}{[b_i]}$, где $[u_i]$, $[Z]$, $[b_i]$ – единицы измерения соответственно оценки i-го ресурса, оптимизируемого показателя Z и объема ресурса i вида.

Величина оценки сырья u_1 = 50 р/кг показывает, что если к имеющемуся объему сырья в рассматриваемой ситуации добавить один дополнительный килограмм сырья, то общая прибыль может быть увеличена за счет увеличения выпуска изделий на 50 р. Если же объем сырья снизится на килограмм, то максимально возможная величина прибыли снизится на 50 р. Аналогично интерпретируется и оптимальная оценка труда u_2^*.

Другими словами, оптимальная оценка ресурса количественно измеряет полезность потребления одной дополнительной единицы ресурса сверх имеющегося объема этого ресурса, т.е. предельную полезность, или предельную эффективность.

В математической форме это можно записать следующим образом. Обозначим через $Z(b)$ максимум целевой функции в задаче (1) – (3), где $b = (b_i)$, $i = 1,...,m$ – вектор объемов ограниченных ресурсов. В обозначении $Z(b)$ подчеркивается зависимость максимума от величины ресурсов. Тогда справедлива формула

$$u_i = \frac{dZ(b)}{db_i} = \lim_{\Delta b_i \to 0} \frac{Z(b_i,...,b_i + \Delta b_i,...,b_m) - Z(b)}{\Delta b_i} \qquad (6)$$

Если изменить объем i-го ресурса b_i на некоторую малую величину Δb_i, то оптимальное значение оптимизируемого показателя Z при новом объеме ресурса можно рассчитать по формуле

$$Z(b_1,...,b_i + \Delta b_i,...,b_m) = Z(b) + u_i^* \cdot \Delta b_i, \qquad (7)$$

т.е. разность между новым и старым оптимумом составит величину $u_i \cdot \Delta b_i$.

В случае изменения всех компонентов вектора b будем иметь

$$Z(b + \Delta b) = Z(b) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \Delta b_i \qquad (8)$$

Хотя формулы (7) и (8) записаны в форме строгих равенств, на самом деле их следует понимать как приближенные равенства. Дело в том, что оптимальные оценки как точную количественную меру предельной эффективности можно использовать лишь в области их доверия или устойчивости. Если же прирост объемов ресурсов значителен, то возможен выход из области доверия оптимальных оценок и их использование в формулах (7) и (8) даст лишь приближенную оценку оптимума в изменившихся условиях.

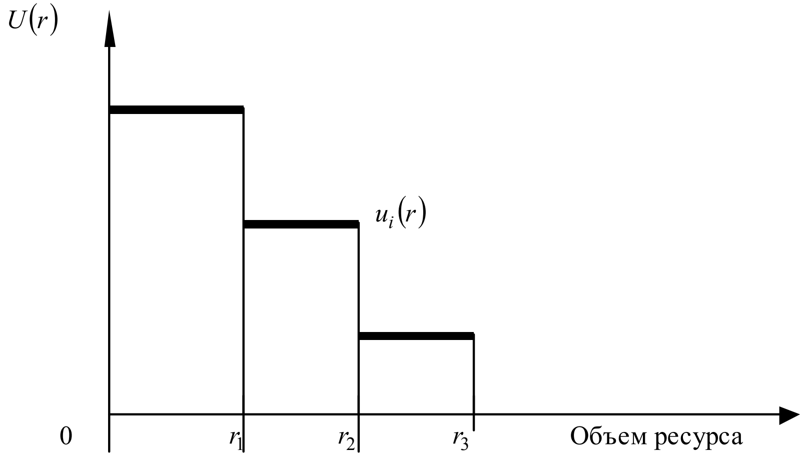


Рис.1. График функции предельной эффективности ресурса в линейных моделях

Отметим, что оптимальная оценка ресурсов как предельная его эффективность обладает общим свойством показателей предельной эффективности и состоящим в их уменьшении с увеличением объема потребления ресурса. Между показателем предельной эффективности ресурса и его объемом потребления имеется обратная связь. С увеличением объема потребления ресурса величина оптимальной оценки снижается.

В линейных моделях наилучшего использования ресурсов показатель предельной эффективности ресурса имеет свои специфические особенности, а именно, если рассмотреть зависимость оптимальной оценки i-го ресурса от объема этого ресурса при неизменных объемах прочих ресурсов, то эта зависимость отображается функцией $u_i(r)$ (r – переменный параметр), имеющей график в виде ступенчатой ломанной линии.

Из графика функции $u_i(r)$ видно, что в пределах некоторых интервалов оптимальная оценка остается оптимальной, а при переходе к другому интервалу происходит скачкообразное понижение оценки. Такие интервалы называются интервалами устойчивости оценок или интервалами их доверия. Таких интервалов конечное число. С некоторого значения объема ресурса происходит насыщение этим ресурсом, и его предельная эффективность становится равной нулю. На рис. 1 это происходит в момент $r = r_3$. С этого момента дополнительное использование ресурса невыгодно. Объясняющих причин этому явлению может быть несколько, и они тесно связаны с рассматриваемой конкретной ситуацией. Это могут быть мощности предприятий и используемые технологии, нормы расхода ресурсов, ограниченность других видов ресурсов и др. Точки разрыва функции $u_i(r)$ соответствуют переходам от одного оптимального базиса к другому.

Вначале, при малых объемах ресурса, предельная эффективность его потребления является высокой, так как привлекаются высокоэффективные способы его использования. Поскольку эти способы характеризуются определенными нормами потребления всех рассматриваемых ресурсов, то интенсивность применения этих способов не безгранична в силу ограниченности всех ресурсов. С некоторого момента могут появиться узкие места при использовании других ресурсов. С целью повышения величины оптимизируемого показателя производится замена высокоэффективного способа другим, но потребляющего другие ресурсы в меньшем объеме, и поэтому появляется возможность увеличить потребление i-го ресурса, хотя и с меньшей эффективностью.

Переход на более низкую эффективность использования i-го ресурса компенсируется увеличением объема его потребления, в результате чего значение оптимума возрастает. После того, как все внутренние резервы объекта исчерпаны, становится невыгодным дополнительное потребление данного ресурса при неизменных прочих условиях модели.

В случае выпуклой модели (1) – (3) с гладкими функциями g_i и f график функции $u_i(r)$ будет представлять собой выпуклую функцию (см. рис.2).

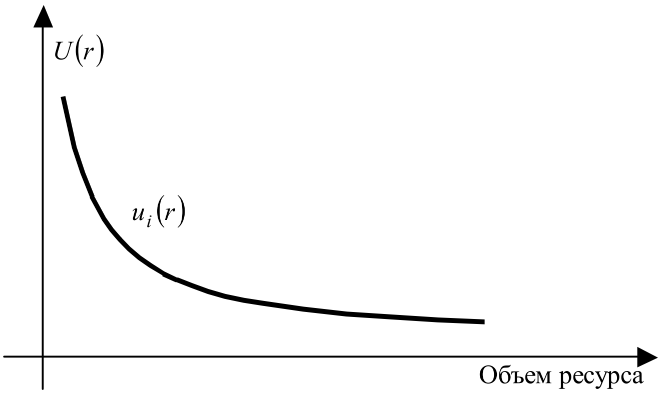


Рис. 2. График функции предельной эффективности в нелинейных моделях

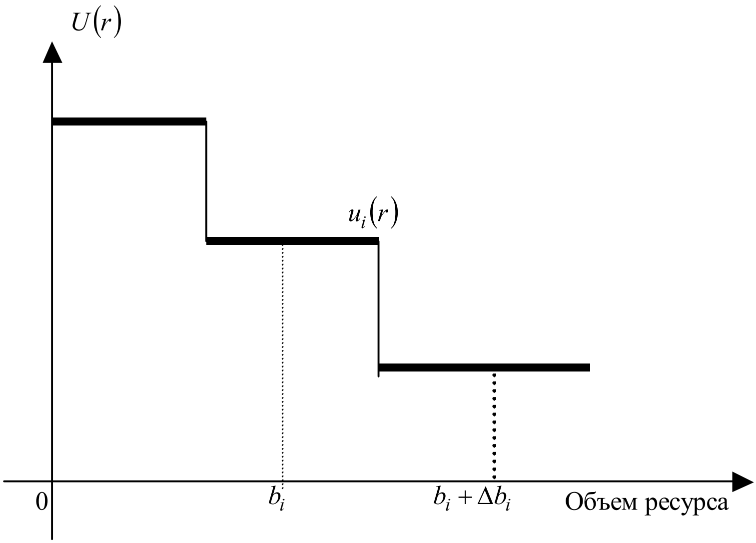


Рис. 3. Графическое определение прироста оптимума

Уточним теперь формулу (7) для расчета значения функции $Z(b_i + \Delta b_i)$. В этой формуле прирост оптимума , выраженный приблизительно в виде $u_i \Delta b_i$, следует заменить интегралом

$$\int_{b_i}^{b_i+\Delta b_i} u_i(r)dr,$$

где $u_i(r)$ – функция предельной эффективности, т.е. прирост характеризуется площадью фигуры, расположенной под линией $u_i(r)$ в интервале изменения i-го ресурса от b_i до $b_i + \Delta\, b_i$. В линейном случае, учитывая ступенчатый характер линии, интеграл может быть заменен суммой (см. рис. 3):

$$\sum u_i^{(k)} l^k,$$

где $u_i^{(k)}$ – предельная полезность, отвечающая k-му интервалу устойчивости, а l^k – длина интервала (для последнего интервала это может быть какая-то его часть).

В частности, если в задаче имеются ограничения типа "≥", связанные, например, с обязательным выпуском продукции, обусловленным договорными условиями. В этом случае на выпуск этой продукции потребуется какой-то объем i-го ресурса b_i^0, меньше которого договорные условия не могут быть выполнены и, следовательно, задача будет не разрешима в интервале $(0, b_i^0)$.

§ 3. Построение функции предельной эффективности ресурсов

Рассмотренная выше функция предельной эффективности играет существенную роль в задачах наилучшего использования ресурсов. Математический аппарат, привлекаемый для ее построения, состоит в параметрическом анализе оптимизационных моделей. Методику построения проиллюстрируем на конкретной экономической ситуации.

Пусть имеется предприятие, которое в своей деятельности использует два способа производства: один способ для выпуска продукции A, другой – для продукции B. При выпуске этих продуктов расходуются время на оборудование и электроэнергия. Известны нормы расхода этих двух ресурсов на единичный выпуск продукции A и B. В результате реализации продуктов предприятие получает прибыль. Требуется изучить влияние объема потребляемой электроэнергии на величину прибыли и поведение функции предельной эффективности электроэнергии в рассматриваемой ситуации.

Исходные данные задачи записаны в следующей таблице.

Ресурсы	Норма расхода ресурсов		Объём ресурсов
	A	*B*	
Оборудование, ст.-ч	2	1	6
Электроэнергия, КВт·ч	5	4	r
Прибыль, р	3	2	

Составим математическую модель производственного процесса. Обозначим x_1 – объем выпуска продукции A, x_2 – объем выпуска продукции B, r – объем электроэнергии, который будем считать переменным параметром. Выпишем ресурсные ограничения и целевую функцию модели.

Загрузка оборудования – $2x_1 + x_2 \le 6$ – эффективный фонд времени.

Потребление эл/энергии – $5x_1 + 4x_2 \le r$ – объем электроэнергии.

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Общая прибыль – $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

Пусть $Z(r)$, $u_2(r)$ – максимальная прибыль и предельная эффективность электроэнергии, соответствующие объему электроэнергии r. Исследуем эти зависимости от параметра r методом параметрического анализа построенной линейной модели.

Начальная симплексная таблица представлена в табл. 0.

Табл. 0

	$v_1 = -x_1$	$v_2 = -x_2$	ω 1	
$u_1 y_1$	2	1	6	
$u_2 y_2$	5	4	r	←
$1 z$	–3	–2	0	
	↑			

Найдем сначала оптимальное решение в точке $r = 0$ и ее окрестности.

Необходимо найти разрешающий столбец. Выбор его сделаем таким образом, чтобы за одну итерацию перейти к оптимальной симплексной таблице. Для этого привлечем следующие экономические соображения. Выбор разрешающего столбца – это процедура поиска переменной среди небазисных переменных x_1 и x_2 кандидата для перевода в число базисных, что в рассматриваемой ситуации означает, производство какого из двух видов продуктов A и B следует начать в первую очередь в случае малого объема r электроэнергии. Ясно, что при малом значении r лимитирующим ресурсом будет электроэнергия, а не оборудование, и потому можно считать, что мы имеем дело поначалу как бы лишь с одним ограничением.

Поэтому следует выбрать такой продукт, при производстве которого потребляемый 1 кВт·ч обеспечит получение наибольшей прибыли. Так как единичный выпуск продукта *A* сопряжен с потреблением 5 кВт·ч и получением прибыли 3 р., то эффект потребления 1 кВт·ч равен 3 р/5 кВт·ч = 0,6 р/кВт·ч, а при производстве продукта *B* этот эффект будет 2 р/4 кВт·ч = 0,5 р/кВт·ч.

Производство продукта *A*, следовательно, эффективнее при малом объеме электроэнергии, и в качестве разрешающего выбираем первый столбец таблицы. Вторая строка выбирается разрешающей в соответствии с симплексной процедурой как $\min\left(\frac{6}{2}, \frac{0}{5}\right) = 0$.

В симплексной таблице элемент 5 является разрешающим. В результате преобразования табл. 0 приходим к табл. 1.

Табл. 1

	$u_2 = -y_2$	$v_2 = -x_2$	ω 1	
$u_1 y_1$	–2/5	–3/5	$6–2r$	←
$v_1 x_1$	1/5	4/5	$r/5$	
$1 z$	3/5	2/5	$3r/5$	
	↑			

Полученная таблица определяет следующие оптимальные прямое и двойственное решения:

$$X=(r/5{,}0),\quad Y=(6-2r/5{,}0),$$

$$V=(0{,}2/5),\quad U=(0{,}3/5),$$

$$Z=3r/5,\qquad r\in(0{,}15)$$

Вместе с решениями показан и интервал устойчивости оптимального базиса (интервал доверия полученным решениям), который находится путем решения системы неравенств. Так как от параметра r зависит только прямое решение, то табл. 1 будет оптимальной при тех значениях r, при которых элементы последнего столбца таблицы будут неотрицательными.

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} 6-2r/5\ge 0, \\ r/5\ge 0, \end{cases}$$

получаем $0\le r\le 15$.

Показатель предельной эффективности ресурса в интервале (0, 15) принимает постоянное значение $u_2(r)$ = 3/5, а максимальное значение прибыли $Z(r)$ в этом интервале подсчитывается через этот показатель по формуле $Z(r)=\dfrac{3r}{5}$.

Пусть теперь r > 15. Тогда первый элемент последнего столбца становится отрицательным. Так как оптимальное двойственное решение не зависит от r, то оно будет допустимым и при r > 15. Поэтому для оптимизации воспользуемся двойственным симплекс-методом.

Первая строка в этом случае становится разрешающей, а для определения разрешающего столбца находим среди частных от деления элементов последней строки на отрицательные элементы разрешающей строки максимальное отношение:

$$\max\left\{\frac{3}{5}:\left(\frac{-2}{5}\right);\frac{2}{5}:\left(\frac{-3}{5}\right)\right\}=-\frac{2}{3}$$

Преобразуем табл. 1 относительно разрешающего элемента, в результате получим табл.2.

Табл. 2

	$u_2 =$ $-y_2$	$u_1 =$ $-y_1$	ω 1	
$v_2 x_2$	2/3	–5/3	$-10+2r/3$	
$v_1 x_1$	–1/3	4/3	$8-r/5$	←
$1 z$	1/3	2/3	$4+r/3$	
	↑			

$$X=(8-r/3,-10+2r/3),\quad Y=(0,0),$$

$$V=(0,0),\qquad U=(2/3,1/3),$$

$$Z=\omega=4+r/3,\qquad r\in(15,24)$$

Интервал устойчивости найден из системы неравенств

$$\begin{cases}-10+\dfrac{2}{3}r\ge 0\\ 8-\dfrac{1}{3}r\ge 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}r\ge 15\\ r\le 24\end{cases}$$

Показатель предельной эффективности электроэнергии снизился с $\frac{3}{5}$ р/кВт·ч до $\frac{1}{3}$ р/кВт·ч.

Это означает, что потребление 1 кВт·ч в интервале (15, 24) дает дополнительную прибыль 1/3 р, к сумме прибыли, полученной при использовании первых 15 единиц энергии с эффективностью 3/4 р/кВт·ч. Чтобы получить общую прибыль при каком-то значении $r \in (15{,}24)$ нужно сложить две величины, т.е. значение $Z(r)$, $r \in (15{,}24)$ можно рассчитать по формуле

$$Z(r) = \int_0^{15} \frac{3}{5} dr + \int_{15}^{r} \frac{1}{3} dr = 9 + \frac{1}{3}(r - 15) = 4 + \frac{1}{3} r$$

Если, например, $r = 18$, то $Z(18) = 9 + \frac{1}{3}(18 - 15) = 9 + 1 = 10$ р.

Второе слагаемое в этой сумме 1 р. – это и есть дополнительная прибыль, полученная за счет потребления дополнительных 3 кВт·ч сверх 15 кВт·ч.

Заметим, что в табл. 2 элементы последнего столбца состоят из двух слагаемых: свободных членов и членов, зависящих от r. Коэффициенты при r равны элементам столбца, отвечающего переменной y_2, а свободные члены получены симплексным преобразованием постоянных членов последнего столбца предыдущей таблицы.

При $r > 24$ компонента x_1 становится отрицательной (второй элемент последнего столбца), следовательно, вторая строка становится разрешающей, а так как в ней лишь один отрицательный элемент, то он и определяет разрешающий столбец. Переходим к табл.3.

Табл. 3

	$v_1 = -x_1$	$u_1 = -y_1$	ω 1
$v_2 x_2$	2	1	6
$u_2 y_2$	–3	–4	$-24 + r$
$1 z$	1	2	12

$$X = (0{,}6), \quad Y = (0{,}-24 + r),$$

$$V = (1{,}0)\ , \quad U = (2{,}0),$$

$$Z = \omega = 12\,, \quad r \in (24{,}+\infty)$$

В результате анализа задачи получены функция предельной эффективности потребления электроэнергии в интервале $(0{,}+\infty)$ и функция $Z(r)$, характеризующая зависимость максимальной прибыли на предприятии от величины объема электроэнергии.

Представим их в виде следующей сводной таблицы.

R	$0 \le r \le 15$	$15 \le r \le 24$	$24 \le r \le +\infty$
$u(r)$	3/5	1/3	0
$Z(r)$	$3r/5$	$4 + r/3$	12

Построим графики этих функций.

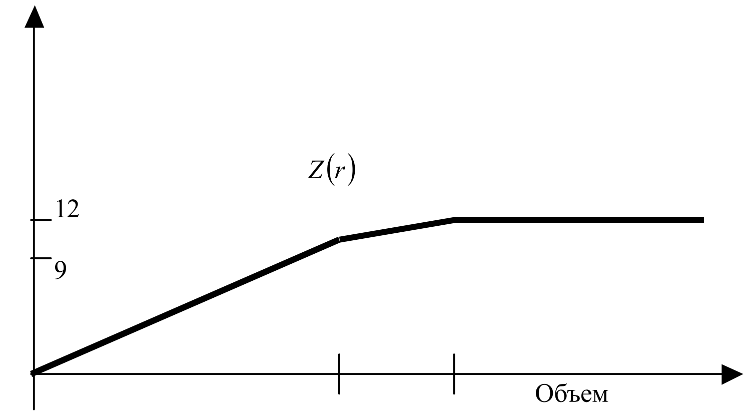


Рис. 4. График функции $Z(r)$

График функции $u_2(r)$ представляет собой ступенчатую линию, а функции $Z(r)$ – кусочно-прямую линию.

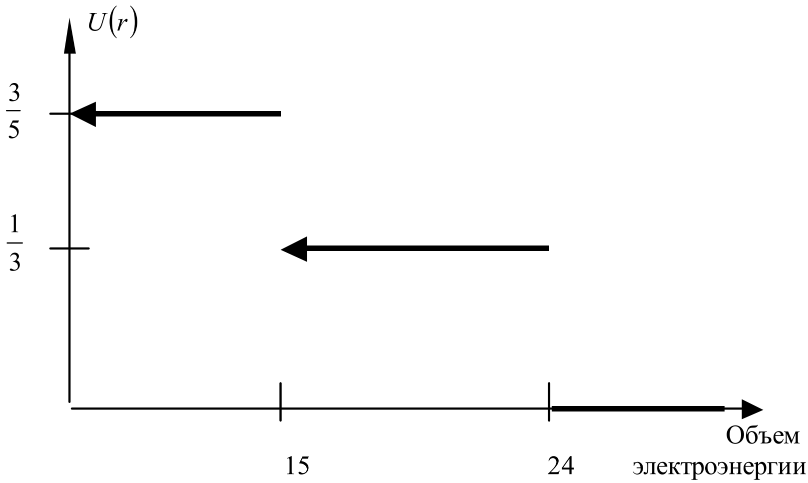


Рис. 5. График функции предельной эффективности электроэнергии

§ 4. Моделирование механизмов оптимального распределения ресурсов. Централизованное распределение и рыночный механизм

Часто в экономике приходится решать задачу о наилучшем распределении каких-либо ограниченных ресурсов среди объектов некоторой сложной системы, содержащей эти объекты. Например, о распределении капвложений, дефицитного оборудования или сырья между предприятиями объединения (отрасли). Основным критерием при этом является достижение наибольшего общего эффекта, получаемого от использования рассматриваемых ресурсов в системе.

Покажем, как можно осуществить такое распределение централизованным путем и с помощью рыночного (ценового механизма).

4.1. Механизм централизованного распределения ресурсов по принципу наибольшей эффективности использования

Содержательную постановку задачи уточним на следующем примере. Рассмотрим объединение, состоящее из нескольких предприятий. Каждое предприятие производит некоторые продукты на имеющихся мощностях, используя при этом определенные ресурсы.

Используемые ресурсы можно разделить на две части. Часть ресурсов на предприятии имеют локальный характер (оборудование, трудовые ресурсы, сырье, материалы и т.д.), а часть ресурсов распределяется органом управления объединения централизованно. Требуется так распределить эти ресурсы между предприятиями, чтобы была получена максимальная прибыль в целом по объединению.

Для решения этой задачи применим принцип наибольшей эффективности использования распределяемых ресурсов. В первую очередь при таком методе распределения ресурс направляется тому предприятию, где предельная эффективность его потребления наибольшая.

Проиллюстрируем этот механизм распределения на конкретном примере. Пусть объединение состоит только из двух предприятий. Исходные данные по этим предприятиям даны в следующих таблицах.

Исходные данные по первому предприятию.

Ресурсы	Норма расхода ресурсов		Объём ресурсов
	1	2	
Оборудование, ст.-ч	2	1	6
Электроэнергия, кВт·ч	5	4	?
Прибыль, р.	3	2	

Из этой таблицы видно, что предприятие производит два вида продукции, по которым заданы нормы расхода по используемым ресурсам и ожидаемая прибыль от реализации продукции в расчете на единицу продукции. Отметим, что по этим данным в предыдущем параграфе исследован показатель предельной эффективности использования электроэнергии в интервале $[0,+\infty)$.

Исходные данные по второму предприятию.

Ресурсы	Норма расхода ресурсов			Объём ресурсов
	1	2	3	
Оборудование, ст.-ч	50	20	40	100
Сырьё	2	2	2	3
Электроэнергия, кВт·ч	10	15	40	?
Прибыль, р.	8	10	12	

Пусть электроэнергия является тем ресурсом, который распределяется между предприятиями органом управления объединением, а другие ресурсы имеются у предприятий в определенных объемах.

Предположим, что требуется распределить 36 единиц электроэнергии между этими предприятиями. Ясно, что в зависимости от объемов выделяемого ресурса прибыль на предприятиях будет различной и по объединению в целом.

Обозначим через x_{ij} выпуск j-й продукции на i-м предприятии, тогда задачи предприятий при выделении им электроэнергии в объемах r_1 и r_2 будут состоять в наилучшем использовании всех ресурсов с целью получения наибольшей прибыли.

Задача предприятия 1

$$2x_{11} + x_{12} \le 6,$$
$$5x_{11} + 4x_{12} \le r_1,$$
$$x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0,$$
$$Z_1 = 3x_{11} + 2x_{12} \to \max$$

Задача предприятия 2

$$50x_{21} + 20x_{22} + 40x_{23} \le 100,$$
$$2x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} \le 3,$$
$$10x_{21} + 15x_{22} + 40x_{23} \le r_2,$$
$$x_{21} \ge 0,\ x_{22} \ge 0,\ x_{23} \ge 0,$$
$$Z_2 = 8x_{21} + 10x_{22} + 12x_{23} \to \max$$

Обозначим $Z_1(r_1)$ и $Z_2(r_2)$ – максимальную прибыль первого и второго предприятий при выделении им r_1 и r_2 единиц электроэнергии соответственно.

Главная цель органа управления объединения при распределении 36 единиц электроэнергии состоит в получении наибольшей суммарной прибыли по объединению. Следовательно, математическую модель распределения можно записать так:

$$r_1 + r_2 = 36$$
$$r_1 \ge 0,\ r \ge 0, \qquad (*)$$
$$Z = Z_1(r_1) + Z_2(r_2) \to \max$$

Ясно, что главная задача здесь – задача распределения (*), а предприятия, решая свои локальные задачи, должны способствовать решению этой глобальной задачи.

Для того, чтобы решить задачу распределения (*), органу управления нужно иметь какую-то информацию о функциях $Z_i(r_i)$, которой он мог бы руководствоваться при распределении ресурса. Выше говорилось, что по таким показателям можно построить, в случае необходимости, интегральные функции $Z_1(r_1)$ и $Z_2(r_2)$, и значит орган управления, зная показатели эффективности предприятий, может подсчитать и общую ожидаемую прибыль.

Показатель предельной эффективности электроэнергии для первого предприятия уже исследован, поэтому воспользуемся сводной таблицей для этой функции.

Объём ресурса	$0 \le r \le 15$	$15 \le r \le 24$	$24 \le r \le +\infty$
Предельная эффективность	3/5	1/3	0

Аналогичный анализ может провести второе предприятие, в результате которого получится следующая таблица значений функции предельной эффективности $u_2(r_2)$.

Объём ресурса	[0; 15]	[15; 22,5]	[22,5; 60]	[60; +∞)
Предельная эффективность	4/5	2/5	2/25	0

Информацию о показателях эффективности использования электроэнергии, представленную органу управления, следует рассматривать как обоснования размера подаваемых заявок на распределяемый ресурс, в получении которого предприятия заинтересованы (чем больше предприятие получит этот ресурс, тем больше будет его прибыль).

Вместе с тем по этой информации орган управления может осуществлять контроль за величиной прибыли, получаемой на предприятии при выделении ему того или иного ресурса.

Предположим, что обе эти таблицы получены органом управления, хотя эта информация является избыточной для оптимального распределения 36 единиц электроэнергии, и ниже будет приведена модификация алгоритма распределения, требующего меньшего объема информации.

Сравнивая показатели предельной эффективности двух предприятий, орган управления видит, что первые 15 единиц ресурса следует выделить второму предприятию, так как оно будет использовать этот ресурс с большей отдачей. Прибыль здесь от использования этих 15 единиц энергии составит величину $\frac{4}{5} \cdot 15 = 12$, в то время, как если бы отдали эти 15 единиц первому предприятию, прибыль составила бы $\frac{3}{5} \cdot 15 = 9$.

После такого начального распределения остаются нераспределенными еще 36 – 15 = 21 единиц ресурса.

Каждая дополнительная единица ресурса теперь уже на втором предприятии даст прирост прибыли 2/5, в то время как на первом предприятии 15 единиц ресурса могут быть использованы с эффективностью 3/5. Поэтому целесообразно следующие

15 единиц энергии направить первому предприятию. Остаток будет равен 21 – 15 = 6 единиц.

Если отдать оставшуюся энергию первому предприятию, то дополнительная прибыль от использования каждой единицы там будет равна 1/3, а на втором – 2/5. Следовательно, оставшиеся 6 единиц электроэнергии выгоднее отдать второму предприятию.

В итоге получается следующее оптимальное распределение: $r_1^* = 15$, $r_2^* = 15 + 6 = 21$. Ожидаемая прибыль на первом предприятии при этом составит величину $Z_1(15) = (3/5) \cdot 15 = 9$, а на втором $Z_2(21) = (4/5) \cdot 15 + (2/5) \cdot 6 = 14{,}4$.

Суммарная прибыль на двух предприятиях при таком распределении составит

$$Z(36) = Z_1(15) + Z_2(21) = 9 + 14{,}4 = 23{,}4$$

После сделанного централизованным способом распределения электроэнергии каждое предприятие решает свою локальную задачу при выделенных им лимитах на энергию, в результате чего определяются производственные программы выпуска продукции с целью ее реализации и получения прибыли.

4.2. Рыночный (ценовой) механизм распределения ресурсов

Теория и практика показывают, что полного и ясного ответа на вопросы функционирования рыночного механизмов в общем случае пока нет. В особенности это относится к соотношению его с методами государственного регулирования.

Цены в рыночной экономике зависят от величины спроса. Если спрос превышает предложение – цена повышается, если спрос ниже предложения – понижается. В конечном счёте, цены становятся равновесными, т.е. такими, когда спрос и предложение совпадают.

Ценовой механизм при распределении ресурсов по существу и по форме отличается от лимитного. И тем не менее, как это будет видно дальше, они имеют много общего. При определении спроса на ресурс предприятие сравнивает плату за ресурс с эффективностью его использования. Если эффективность использования ресурса выше цены на него, то предприятию выгодно покупать ресурс, если нет – покупка его невыгодна. Так как показатель предельной эффективности зависит от объема потребляемого ресурса, то и цена на ресурс должна зависеть от объема реализуемого ресурса.

Будем изучать рыночный механизм управления ресурсами опять-таки на примере предприятий, моделируемых с помощью линейных оптимизационных моделей. В литературе рыночный механизм применительно к задаче оптимального распределения ресурсов на модельном уровне достаточно полно исследован для «хороших» функций спроса – выпуклых гладких функций. Если же спрос определяется на основе линейных моделей оптимизации, то этим свойством функции спроса не обладают, и здесь возникают трудности при исследовании ценового механизма.

Поскольку все изложение ценового механизма проводится на модельном уровне, то предварительно рассмотрим детально вопрос математического моделирования функции спроса, которая играет ключевую роль в рыночных механизмах.

4.3. Математическое моделирование спроса

Под спросом понимается количество товара (продукции или ресурса), которое потребитель может купить. Ясно, что спрос $S(t)$ зависит от цены t, установленной продавцом на товар. Желание потребителя купить на рынке какой-то товар должно подкрепляться его платежеспособностью и полезностью при производственной или какой-то другой деятельности потребителя. Функция спроса обладает определенными общими свойствами. Известно, например, из практики и доказано теоретически, при довольно общих разумных гипотезах, что спрос на товар при прочих неизменных условиях увеличивается с понижением цены, т.е. между величиной спроса и ценой имеет место обратная зависимость.

Как было показано выше, при потреблении ресурса действует закон понижающейся его предельной эффективности или полезности. Наступает такой момент, когда предельная эффективность ресурса может оказаться ниже его цены, вследствие чего оказывается невыгодным его потребление. Существует поэтому тесная связь между спросом, ценой на ресурс и его предельной эффективностью.

Исследуем эту связь на примере того предприятия, для которого исследован показатель предельной эффективности потребления электроэнергии.

Итак, предприятие производит два продукта при ограниченном фонде времени на оборудование, которые реализуются ради получения максимальной прибыли. Будем изучать спрос на электроэнергию в зависимости от цены на нее. Существенное отличие рассматриваемого подхода состоит в том, что в данном случае этот ресурс не предоставляется предприятию бесплатно, а продается по определенным ценам.

Напомним исходные данные.

Ресурсы	Норма расхода ресурсов		Объём ресурсов
	1	2	
Оборудование	2	1	6
Электроэнергия	5	4	?
Прибыль	3	2	

Строку «прибыль» в данной ситуации следует понимать условно. В этом показателе, очевидно, следует учесть плату за используемую электроэнергию, т.е. задачу предприятия можно теперь математически записать так:

$$2x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$P = Z - tS = (3 - 5t)x_1 + (2 - 4t)x_2 \to \max,$$

где $Z = 3x_1 + 2x_2$, t – цена за электроэнергию, $S = 5x_1 + 4x_2$ – объём потребления электроэнергии при выпуске предприятием продуктов А и В в объемах x_1 и x_2. Величина tS – плата за потребляемую электроэнергию.

Главное внимание обратим на величину спроса электроэнергии S, которая определяется производственной потребностью и зависит от цены t.

Исследование в данной конкретной ситуации можно провести либо графически, либо симплекс-методом. Используем последний, т.к. он универсален и применим в случае многих неизвестных x_j.Первоначальная таблица, зависящая от параметра t, будет такой:

Табл.0	$V_1 =$ $-x_1$	$v_2 =$ $-x_2$	ω 1
$u_1 y_1$	2	1	6
1P	$-3 + 5t$	$-2 + 4t$	0

↑

Эта таблица определяет оптимальное решение для тех значений параметра t, при которых элементы P – строки неотрицательны, т.е. удовлетворяют неравенствам

$-3 + 5t \geq 0,\ 2 + 4t \geq 0 \Rightarrow t \in [3/5, +\infty)$

Если цена за ресурс $t \in [3/5, +\infty)$, то $X = (0, 0)$, $S = 0$, т.е. предприятию невыгодна его покупка, т.к. наибольшая предельная эффективность его использования, как было показано выше, не может быть больше 3/5.

Пусть цена t будет ниже 3/5. Тогда двойственная оценка v_1 переменной x_1 станет отрицательной и переменную x_1 необходимо сделать базисной вместо переменной y_1. Переходим к новой таблице

Табл.1	$u_1 = -y_1$	$v_2 = -x_2$	ω 1
$v_1 x_1$	1/2	1/2	3
1P	$\frac{3-5t}{2}$	$\frac{-1+3t}{2}$	$9 - 15t$

$\uparrow$

которая определяет $X = (3, 0)$, $P = 9 - 15t$ в интервале $t \in [1/3, 3/5]$ (интервал получен решением системы двух неравенств: $3 - 5t \geq 0$, $1 + 3t \geq 0$).

Поскольку $P = Z - tS$, то $Z = 9$, а спрос $S = 15$.

Отметим, что при цене $t = 3/5$ задача имеет не единственное оптимальное решение. Любая выпуклая линейная комбинация решений, определяемых табл.0 и табл.1, будет оптимальным решение исходной задачи.

Поэтому при цене $t = 3/5$ у предприятия будет не однозначный спрос на электроэнергию. Этот спрос будет колебаться в интервале [0, 15]. Неоднозначность спроса объясняется тем, что предельная эффективность потребления в данном интервале равна 3/5, т.е. совпадает с ценой.

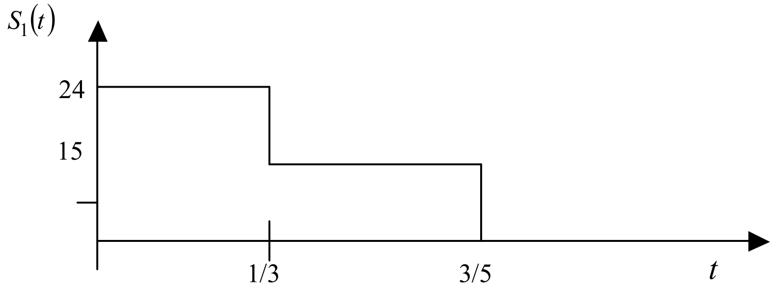
Эффект неоднозначности спроса будет иметь место каждый раз, когда предельная эффективность становится равной цене.

Продолжая параметрический анализ исходной задачи при $t < 1/3$, получим следующую симплексную таблицу:

Табл.2	$u_1 =$ $-y_1$	$v_1 =$ $-x_1$	ω 1
v_2 x_2	1	2	6
1 P	$2 - 4t$	$1 - 3t$	$12 - 24t$

Эта таблица определяет новую производственную программу $X = (0, 6)$, $P = 12 - 24t$ в интервале $t \in [0, 1/3]$. Здесь $Z = 12$, а спрос $S = 24$, причем при $t = 1/3$ спрос неоднозначен и колеблется в интервале [15, 24]. Напомним, что предельная эффективность потребления электроэнергии в этом интервале равна 1/3.

Построим график функции $S(t)$ при $t \in [0, +\infty)$.



($S_1(t)$ – спрос на электроэнергию; t – цена на электроэнергию)

Из графика видно, что неоднозначный спрос у предприятия возникает три раза при $t = 0$, 1/3, 3/5. С увеличением цены спрос снижается, и он становится равным нулю при $t > 3/5$. При цене $t > 3/5$ плата за электроэнергию превышает максимально возможную эффективность ее использования на предприятии, т.е. потребление ее становится убыточным.

Отметим, что данный график легко построить на основе графика показателя предельной эффективности. Если известна функция $U(r)$, то нетрудно найти функцию $S(t)$, и наоборот.

Вернемся теперь к вопросу об использовании ценового механизма при распределении электроэнергии в объеме 36 единиц между рассмотренными двумя предприятиями. Для этого нам понадобятся функции спроса на электроэнергию первого и второго предприятий. Для первого предприятия она была нами построена, для второго построим ее на основе показателя предельной эффективности.

Обе функции приведем в табличной форме.

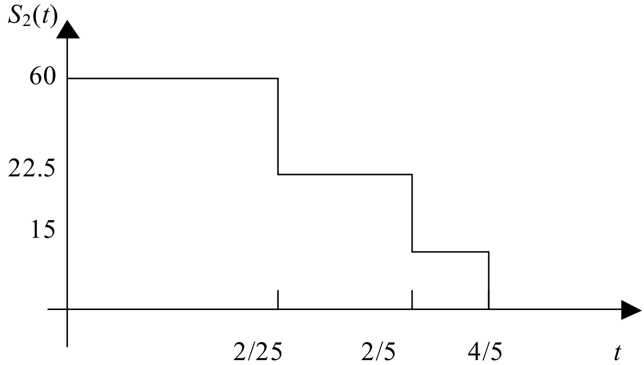
Функция спроса на электроэнергию для первого предприятия

Цена (t)	(0, 1/3]	1/3	[1/3, 3/5]	3/5	[3/5, +∞)
Спрос $S_1(t)$	24	[15, 24]	15	[0, 15]	0

Функция спроса на электроэнергию для второго предприятия

Цена (t)	(0, 2/25]	2/25	[2/25, 2/5]	2/5	[2/5, 4/5]	4/5	[4/5, +∞)
Спрос $S_2(t)$	60	[22.5, 60]	22.5	[15, 22.5]	15	[0, 15]	0

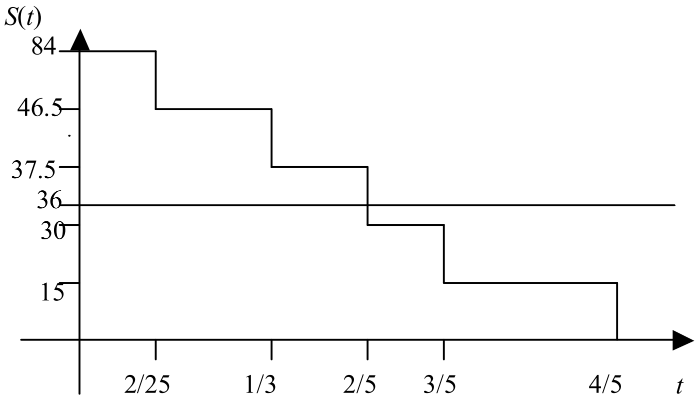
Построим график функции $S_2(t)$ при $t \in [0, +\infty)$:



($S_2(t)$ – спрос на электроэнергию; t – цена на электроэнергию)

Определим теперь суммарный спрос двух предприятий на электроэнергию в зависимости от цены t.

Обозначим функцию суммарного спроса $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ и представим ее графически.



($S(t)$ – суммарный спрос на электроэнергию; t – цена на электроэнергию)

Имея график функции $S(t)$ или ее табличное представление, можно определить оптимальную (равновесную) цену t^*, соответствующую предложению по объему электроэнергии, равному 36 единиц.

Из графика функции суммарного спроса $S(t)$ видно, что величина спроса $S(t) = 36$ единиц, равная предложению, соответствует цене $t^* = 2/5$. Следовательно, эта цена и является равновесной. При такой цене у первого предприятия спрос определяется однозначно и он равен $S_1(t) = 15$ единиц, а у второго предприятия спрос $S_2(t)$ неоднозначен и он колеблется в интервале [15; 22,5].

§ 5. Моделирование процессов наилучшего распределения ресурсов методом динамического программирования

Основные идеи, приведшие к методу динамического программирования, развиты американским ученым Беллманом в начале 50-х годов. Динамическое программирование эффективно применяется для оптимизации процессов, которые распадаются на ряд последовательных шагов (этапов), на каждом из которых возможно осуществить управление. При этом управление на каждом последующем шаге не оказывает влияния на величину показателя качества управления, полученного на предыдущих шагах.

Представим себе некоторый процесс, распадающийся на несколько этапов. Например, производство на предприятии в течение ряда лет. Пусть показатель эффективности деятельности предприятия характеризуется некоторым показателем, например, получаемой прибылью. Для функционирования предприятия в каждый из годов $t = 1,..., n$ используется не который ресурс (например капиталовложения), причем сумма потребления за n лет этого ресурса не должна в объеме превзойти заданную величину S.

Известно, что при выделении в год ресурса в количестве x_t предприятие получает прибыль в размере $\varphi_t(x_t)$. Ниже показаны возможные распределения ресурса и получаемая прибыль по годам.

Рис. 1. Динамика распределения ресурса

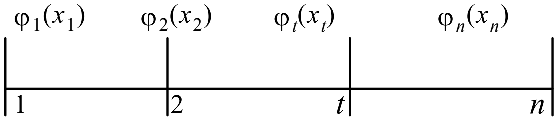


Рис. 2. Динамика получения прибыли

От различных распределений ресурса по времени существенно зависит и динамика получаемой прибыли. Требуется так распределить заданный ресурс S по годам рассматриваемого периода, чтобы суммарная прибыль была максимальной, т.е. необходимо найти такой неотрицательный вектор $X = (x_1,..., x_n)$, при котором функция Z принимает наибольшее значение.

Математическую модель процесса распределения можно записать следующим образом:

$$x_1 + ... + x_n = S\,,$$

$$x_1 \geq 0\,,\ \ldots,\ x_n \geq 0\,,$$

$$Z(x_1,...,x_n) = \varphi_1(x_1) + ... + \varphi_n(x_n) \to \max$$

Из модели видно, что сумма прибыли складывается из прибылей, получаемых по годам, причем прибыль в году t, равная $\varphi_t(x_t)$, зависит только от ресурса, используемого предприятием в этом году, и не зависит от того, сколько этого ресурса было потреблено в предыдущих годах. Функция $Z = Z(x_1,..., x_n)$

является аддитивной. Процесс распределения ресурса, о котором идет речь, является управляемым, т.е. мы можем выбирать параметры x_t, которые влияют как на получение прибыли в каждом году, так и на общую величину прибыли.

Процесс распределения, например, капиталовложений в динамике, естественным образом распадается на n шагов, где каждый t-*й* шаг – это выделение предприятию капвложений в году t. Мы получим такую же математическую модель, если ресурс будет распределяться не по годам, а между n различными предприятиями в одном периоде (году). Если известна функция $\varphi_k(x_k)$ производимой продукции (или прибыль от реализации продукции) на k предприятии, в зависимости от выделенного ему ресурса x_k, то задача будет состоять в таком распределении общего количества ресурса S между предприятиями, чтобы общий выпуск продукции был максимальным.

Аналогичную модель получим, если рассмотрим задачу о распределении заданного объема работ по разным видам оборудования. В зависимости от объема выполняемой работы могут существенно отличаться эксплуатационные расходы. Задача может состоять в таком распределении работ по видам оборудования, чтобы суммарные эксплуатационные расходы были минимальными.

Рассмотрим еще такую задачу: *автомашина эксплуатируется в течение* n *лет . В начале каждого года необходимо* *принять одно из трех решений:*

– продать старую машину и заменить ее новой;

– сделать ремонт и продолжать эксплуатацию;

– обойтись без ремонта.

Здесь пошаговое управление – выбор в каждом году из этих трех возможных вариантов одного. Можно пронумеровать эти варианты числами 1, 2 и 3. Задача будет состоять в том, чтобы определить такое чередование этих трех чисел по годам периода из n лет, которое приводит к минимальным суммарным затратам на эксплуатацию, ремонт и покупку новой машины.

Если обозначить затраты в t-*м* году через $\varphi_t(x_t)$, где x_t – принятое решение в t-*м* году, то общие затраты составят величину $Z = \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(x_t)$, которую нужно минимизировать.

Управление или стратегия эксплуатации машины здесь будет определяться вектором $X = (x_1, ..., x_n)$, компоненты которого x_t могут принимать значения 1, 2, 3. Например, управление задаваемое вектором $X = (3, 3, 1, 3, 2)$ означает, что первые два года следует обходиться без ремонта, на третьем году машину следует продать и купить новую, затем ездить на ней год без ремонта, а на следующий год сделать ремонт.

Любую многошаговую задачу можно решать по-разному: или все параметры находить сразу за один шаг, или строить оптимальное управление шаг за шагом. Обычно второй способ оказывается значительно проще, особенно при большом числе шагов. Идея последовательной оптимизации и составляет суть метода динамического программирования. Не следует понимать под шаговой или последовательной оптимизацией процедуру, в результате которой вся задача разбивается на ряд малых, которые решаются отдельно и независимо друг от друга. Решение, принимаемое на одном шаге, должно быть дальновидным и оценивать все последствия, к которым оно может привести.

Некоторые решения являются наиболее эффективными для какого-то момента времени, но принятие такого решения может лишить нас получения дополнительного эффекта в будущем. Решение надо выбирать на каждом шаге с учетом всех его последствий на предстоящих еще шагах. Решение на *t-м* шаге выбирается не так, чтобы эффект именно на *t-м* шаге был максимальным, а так, чтобы была максимальной сумма эффекта на данном шаге и эффекта, ожидаемого на последующих шагах. Только на последнем шаге решение может быть принято без оценки будущего. Предполагается, что это будущее зафиксировано каким-то образом, и мы его не вправе изменить. На последнем шаге метода динамического программирования оптимизация исходит из максимальной эффективности одного только шага. Так как эффект от принятия решения на *t-м* шаге зависит только от величины x_t, то не играет роли, что считать началом и концом рассматриваемого периода. Поэтому заменить описанный выше принцип принятия решения на *t-м* шаге можно следующим принципом: выбор решения на *t-м* шаге должен быть сделан таким образом, чтобы общий эффект от всех предыдущих решений плюс эффект на *t-м* шаге был наибольшим.

Использование обоих этих принципов выбора частных решений приводит к одному и тому же оптимальному распределению и одинаковой сложности алгоритмам, но вычислительные схемы при этом немного различаются.

Проиллюстрируем идею метода динамического моделирования на примере задачи оптимального распределения ресурсов.

Во многих задачах планирования и управления требуется правильно решить вопрос о распределении того или иного ресурса между объектами системы, исходя из эффективности его использования. Функции, определяющие такой эффект на каждом объекте, имеют нелинейный характер и существенно различаются для разных объектов. Для случая одного ресурса или немногих видов ресурсов такая задача может быть решена методом динамического программирования.

Рассмотрим следующую ситуацию. *Объединение располагает средствами в объеме 500 тыс. р., которые оно намерено использовать для реконструкции и модернизации четырех своих предприятий В зависимости от величины используемых капи-*

таловложений предприятие ежегодно получает прирост прибыли в размерах, заданных в следующей таблице.

Капиталовложения, тыс. р.	Прирост прибыли, тыс. р.			
	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_2)$	$\varphi_3(x_3)$	$\varphi_4(x_4)$
0	0	0	0	0
100	28	25	15	20
200	45	41	25	33
300	65	55	40	42
400	78	65	50	48
500	90	75	62	53

Требуется так распределить капиталовложения между предприятиями, чтобы увеличение прибыли было наибольшим.

Здесь $\varphi_k(x_k)$ – прирост прибыли, полученный на *k-ом* предприятии, при величине капиталовложений x_k. Эти функции заданы в табличной форме.

Тогда математическая модель задачи запишется так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$$

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3) + \varphi_4(x_4) \to \max$$

Целевая функция $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ выражает общий ежегодный прирост прибыли объединения, соответствующий распределению $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ капиталовложений между четырьмя предприятиями.

Обозначим $f_1(S) = \max \varphi_1(x_1)$ – максимальный прирост прибыли при $0 \le x_1 \le S$, который может быть получен на первом предприятии в случае выделения ему S единиц капиталовложений. Так как все функции $\varphi_k(x_k)$ монотонно возрастающие, то ясно, что прирост прибыли будет наибольшим, если предприятие освоит все выделенные ему капиталовложения. Поэтому можно записать, что

$$f_1(S) = \max \varphi_1(x_1),\ 0 \le x_1 \le S \tag{9}$$

Пусть теперь S тыс. р. капиталовложений распределяются между первым и вторым предприятиями, т.е. капиталовложения должны быть разделены на две части (x_2, $S - x_2$), где x_2 – капиталовложения, выделяемые второму предприятию, а ($S - x_2$) – остающаяся часть для первого предприятия.

В результате такого распределения прирост прибыли на первом предприятии составит величину $f_1(S - x_2)$, на втором – $\varphi_2(x_2)$, общий прирост будет равен $f_1(S - x_2) + \varphi_2(x_2)$.

Будем выбирать величину x_2 таким образом, чтобы общий прирост прибыли на 1-м и 2-м предприятиях был наибольшим.

Получаемый при таком выборе x_2 максимальный прирост прибыли на обоих предприятиях обозначим через $f_2(S)$, т.е.

$$f_2(S) = \max_{0 \le x_2 \le S} \{\varphi_2(x_2) + f_1(S - x_2)\} \tag{10}$$

Отметим, что задача (10) является однопараметрической (задачей максимизации, зависящей только от одной искомой переменной).

Если обозначить через $x_2(S)$ величину капитальных вложений выделяемых второму предприятию, обеспечивающую суммарный максимальный прирост прибыли (т.е. $x_2(S)$ – это решение задачи (10)), то можно записать

$$f_2(S) = \varphi_2(x_2) + f_1(S - x_2(S)).$$

Управление (решение) $x_2(S)$ называется условно-оптимальным, так как оно является оптимальным при условии, если первым двум предприятиям выделяются капиталовложения в объеме S единиц.

Далее, в соответствии с методом динамического программирования, следует построить функции $f_3(S)$ и $f_4(S)$. Функция $f_3(S)$ выражает максимальный прирост прибыли, который может быть получен на трех предприятиях в случае распределения между ними S тыс. р. капиталовложений. Эта функция строится по такому же принципу, как и функция $f_2(S)$, а именно

$$f_3(S) = \max_{0 \le x_3 \le S} \{\varphi_3(x_3) + f_2(S - x_3)\} \qquad (11)$$

Задача (11) – это задача принятия решения на 3-м шаге, т.е. задача определения капиталовложений третьему предприятию. Эта задача решается для каждого значения $S = 1, \ldots, 5$. В результате решения определяются две величины: величина $x_3(S)$ – условно-оптимальный объем капиталовложений, выделяемый третьему предприятию, и $f_3(S)$ – прирост прибыли на трех предприятиях в случае наилучшего распределения между ними S тыс. р. капиталовложений.

Последней задачей в нашем примере будет задача поиска условно-оптимальных решений $x_4(S)$ для четвертого предприятия, т.е. следующая задача максимизации:

$$f_4(S) = \max_{0 \le x_4 \le S} \{\varphi_4(x_4) + f_3(S - x_4)\} \qquad (12)$$

Уравнения (9) – (12) называются рекуррентными уравнениями Беллмана. Задачи (9) – (12) решаются последовательно, результаты их решения ($x_k, f_k(S)$), $k = 1,\dots, 4$ можно представить в виде следующей итоговой таблицы.

Кап-вложе-ния	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	$x_1(S)$	$f_1(S)$	$x_2(S)$	$f_2(S)$	$x_3(S)$	$f_3(S)$	$x_4(S)$	$f_4(S)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	100	28	0	28	0	28	0	28
200	200	45	100	53	0	53	0	53
300	300	65	100	70	0	70	0	73
400	400	78	100	90	0	90	0,100	90
500	500	90	200	106	0	106	100	110

В столбце $k = 1$ представлены результаты решения задачи (9). Здесь $f_1(S) = \varphi_1(S)$ и $x_1(S) = S$, так что фактически каких-либо расчетов при решении задачи (9) делать не нужно.

Приведем вычислительную схему для решения задачи (10). Эта схема представлена в следующей таблице.

S	x_2	$\varphi_2(x_2)$	$f_1(S-x_2)$	$\varphi_2(x_2)+f_1(S-x_2)$	$f_2(S)$
0	0	0	0	0	0
100	0	0	28	28	28
	100	25	0	25	–
200	0	0	45	45	–
	100	25	28	53	53
	200	41	0	41	–
300	0	0	65	65	–
	100	25	45	70	70
	200	41	28	69	–
	300	55	0	55	–
400	0	0	78	78	–
	100	25	65	90	90
	200	41	45	86	–
	300	55	28	83	–
	400	65	0	65	–
500	0	0	90	90	–
	100	25	78	103	–
	200	41	65	106	106
	300	55	45	100	–
	400	65	28	93	–
	500	75	0	75	–

При решении задачи (10) поиск условно-оптимальный решений $x_2(S)$ производится только среди целых чисел, т.е. решается следующая задача: $f_2(S) = \max\limits_{0 \le x_2 \le S} \{\varphi_2(x_2) + f_2(S - x_2)\}$.

Это означает, что оптимальное распределение находится среди целых чисел (с точностью до 100 тыс. р.). Если такая точность не устраивает, то следует расширить область допустимых значений для $x_2(S)$, указав в интервале $[0, S]$ все необходимые значения x_2 (с шагом 10 тыс. р., например).

В столбце x_2 таблицы показаны возможные значения x_2. Например, при $k = 3$ возможны четыре значения $x_2 = 0, 100, 200, 300$, т.е. при распределении 300 тыс. р. между первым и вторым предприятиями возможны следующие варианты распределения $(x_2, S - x_2)$:

1. (0,300) – второму предприятию не давать ничего, а отдать все первому.
2. (100,200) – второму дать 100 тыс. р., первому 200 тыс. р.
3. (200,100) – второму дать 200 тыс. р., первому 100 тыс. р.
4. (300,0) – отдать все 300 тыс. р. второму предприятию.

В столбце $\varphi_2(x_2)$ записываются значения функции $\varphi_2(x_2)$, взятые из начальной таблицы, а в столбце $f_1(S - x_2)$ – значения вычисленной на предыдущем шаге функции $f_1(S)$. Эти значения берутся из итоговой таблицы, в которой должен быть заполнен столбец $k = 1$ к моменту вычисления функции $f_2(S)$.

Далее происходит сложение столбцов $\varphi_2(x_2)$ и $f_1(S - x_2)$, и выбор максимального элемента в столбце $\varphi_2(x_2) + f_1(S - x_2)$ для каждого значения S. В последнем столбце находятся значения функции $f_2(S)$, они вместе с $x_2(S)$ записываются в итоговую таблицу в столбец $k = 2$.

После решения задачи (10) и заполнения столбца $k = 2$ в итоговой таблице решается задача (11) по аналогичной схеме. Составим таблицу.

S	x_3	$\varphi_3(x_3)$	$f_2(S-x_3)$	$\varphi_3(x_3)+f_2(S-x_3)$	$f_3(S)$
0	0	0	0	0	0
100	0	0	28	28	28
	100	15	0	15	–
200	0	0	53	53	53
	100	15	28	43	–
	200	25	0	25	–
300	0	0	70	70	70
	100	15	53	68	–
	200	25	28	53	–
	300	40	0	40	–
400	0	0	90	90	90
	100	15	70	85	–
	200	25	53	78	–
	300	40	28	68	–
	400	50	0	50	–

500	0	0	106	106	106
	100	15	90	105	–
	200	25	70	95	–
	300	40	53	93	–
	400	50	28	78	–
	500	62	0	62	–

Результаты расчетов третьей задачи записаны в столбце k = 3 итоговой таблицы.

Последнюю, четвертую, задачу достаточно решить лишь при одном значении S = 500 тыс. р., чтобы ответить на вопрос об оптимальном распределении 500 тыс. р. между четырьмя предприятиями.

Приведем необходимые расчеты при решении задачи (12) при S = 500 тыс. р. в следующей таблице.

S	x_4	$\varphi_4(x_4)$	$f_3(S-x_4)$	$\varphi_4(x_4)+f_3(S-x_4)$	$f_4(S)$
0	0	0	0	0	0
100	0	0	28	28	28
	100	20	0	20	–
200	0	0	53	53	53
	100	20	28	48	–
	200	33	0	33	–

S	x_4	$\varphi_4(x_4)$	$f_3(S-x_4)$	$\varphi_4(x_4)+f_3(S-x_4)$	$f_4(S)$
300	0	0	70	70	–
	100	20	53	73	73
	200	33	28	61	–
	300	42	0	42	–
400	0	0	90	90	90
	100	20	70	90	90
	200	33	53	88	–
	300	42	28	70	–
	400	48	0	48	–
500	0	0	106	106	–
	100	20	90	110	110
	200	33	70	103	–
	300	42	53	98	–
	400	48	28	96	–
	500	53	0	53	–

Результат решения этой задачи записан в столбце $k = 4$ итоговой таблицы.

После заполнения итоговой таблицы условно-оптимальных решений находим безусловное (окончательное) распределение капиталовложений между четырьмя предприятиями с помощью итоговой таблицы обратным ходом.

Вначале определяем оптимальную величину капиталовложений, выделяемую четвертому предприятию. Её находим из последней строки таблицы. Она равна $x_4(500) = 100$ тыс. р. Вычитая из 500 тыс. р. величину $x_4(500) = 100$ тыс. р., получим остаток 400 тыс. р. – величину вложений для первых трех предприятий. В столбце $k = 3$ находим $x_3(4) = 0$, следовательно, третьему предприятию невыгодно давать капвложения, а все оставшиеся 400 тыс. р. следует разделить между первым и вторым предприятиями.

Переходим к столбцу $k = 2$ и находим в нем величину $x_2(400) = 100$ тыс. р. Определяем остаток, вычитая из 400 тыс. р. величину $x_2(400) = 100$ тыс. р. Остаток равен 300 тыс. р. В столбце $k = 1$ итоговой таблицы находим величину $x_1(300) = 300$ тыс. р.

В результате найдено оптимальное распределение капиталовложений $X^* = (3, 1, 0, 1)$, которому соответствует наибольший ежегодный прирост прибыли по объединению, равный $f_4(500) = 110$ тыс. р.

ГЛАВА 8

Сетевые модели планирования и управления

§ 1. Основные понятия сетевого графика и его упорядочение

В сетевом планировании рассматриваются процессы, состоящие из множества взаимосвязанных работ. Основным понятием в сетевом планировании являются события и работы.

Событие – это момент достижения некоторого результата. Событие не имеет протяженности во времени.

Термин работа в сетевом планировании используется в широком смысле и может иметь несколько значений: некоторый трудовой процесс, требующий затрат времени и ресурсов; ожидание, не требующее затрат труда и ресурсов, но занимающее время (например, процесс затвердевания бетона); фиктивная работа, которая вводится для отображения логической связи между событиями и не требует затрат каких-либо ресурсов, а также не имеет продолжительности во времени.

Для каждой работы должны быть определены те работы, на результаты которых она непосредственно опирается и которые должны быть закончены к моменту начала рассматриваемой.

Начало работы и ее окончание являются событиями, называемыми соответственно начальным и конечным. Если i – начальное событие, а j – конечное для рассматриваемой работы, то сама эта работа обозначается упорядоченной парой (i, j).

Представление событий и работ в виде иллюстраций последовательности их выполнения порождает сетевой график, на котором стрелками (направленными дугами) изображаются работы, а кружками – события. Фрагмент такого графика представлен на рис. 1.

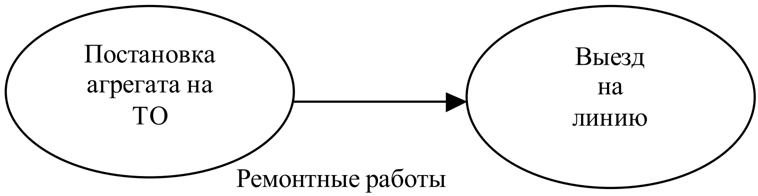


Рис. 1. Представление работы на сетевом графике

Кружками на сетевом графике отражаются события – промежуточные результаты, а стрелками – работы. Кружки, представляющие на сетевом графике события, в соответствии с терминологией графов часто называют вершинами сети, а стрелки – дугами.

В числе работ, например, необходимых в процессе создания нового изделия, могут быть разработка документации, разработка технологического процесса, проектирование оснастки, изготовление узлов и деталей, получение комплектующих изделий, сборка опытного образца и его испытание и т.д.

Условный пример сетевого графика приведен на рис. 2.

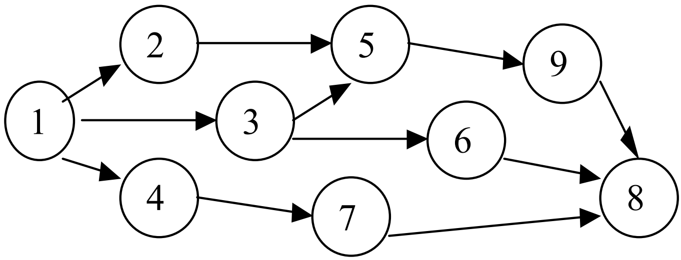
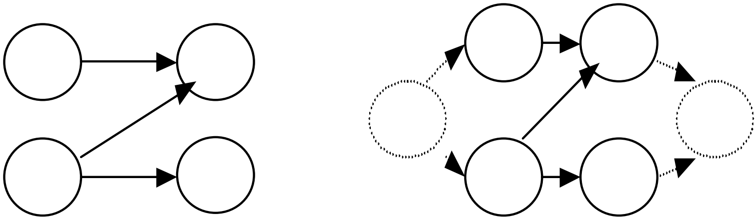


Рис. 2. Пример сетевого графика

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать несколько основных правил.

1. В сетевом графике должно быть одно начальное и одно конечное событие (начальное событие не имеет входящих стрелок, конечное – выходящих). Если указанные условия единственности начального или конечного событий не выполняются, то его можно добиться путем введения фиктивных работ и событий. На рис. 3а изображен сетевой график с двумя начальными и двумя конечными событиями графика, а на рис. 3б показано, как этот график может быть преобразован с тем, чтобы было выполнено условие *1.* Введенные фиктивные события и работы изображены пунктирными линиями.



а б

Рис 3. Пример преобразования сетевого графика

2. В сетевом графике не должно быть «зацикливания», то есть замкнутых контуров, которые по существу означают, что условием начала каждой работы замкнутого контура является ее окончание (см. рис. 4: работы (11,13), (13,12), (12,11) образуют цикл).

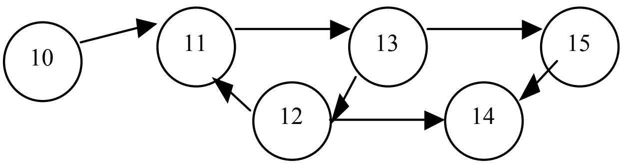


Рис. 4. Пример ошибки в составлении сетевого графика

3. Любые два события на сетевом графике не должны быть непосредственно связаны более чем одной дугой. Такая ошибка встречается при изображении параллельно выполняемых работ (см. рис. 5а). Для правильного представления на сетевом графике работ, которые могут выполняться параллельно, вводятся фиктивные события и работы, изображаемые пунктирными линиями (см. рис. 5б).

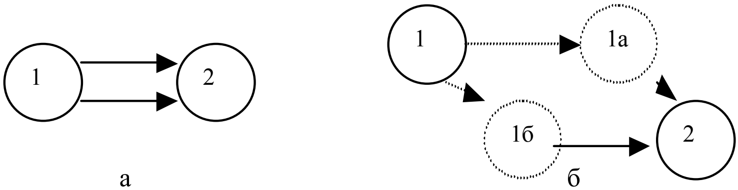


Рис. 5. Пример представления на сетевом графике параллельно выполняемых работ

Анализ сетевого графика на рис. 2 показывает, что он удовлетворяет всем сформулированным условиям, однако этот график не полностью упорядочен. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ и их нумерации, при котором все стрелки были бы расположены слева направо, а для работ (i, j) выполнялось бы условие $i < j$.

Такое упорядочение можно получить с помощью метода вычеркивания дуг, иллюстрация которого приведена на рис. 6.

Начнем осмотр сети с начальной вершины 1, которую относим к нулевому рангу. Вычеркиваем (одной чертой) все дуги, выходящие из вершины 1. Тогда без входящих дуг окажутся вершины 2, 4. Будем называть их вершинами первого ранга, т.к. они соединены с начальной вершиной 1 одной дугой. Вычеркнув (двумя чертами) все дуги, выходящие из вершин первого ранга, опять получим вершины без входящих в них дуг (вершины 3, 7) и т.д. Максимальное число дуг, соединяющих вершины *r-го* ранга с начальным событием, равно *r*.

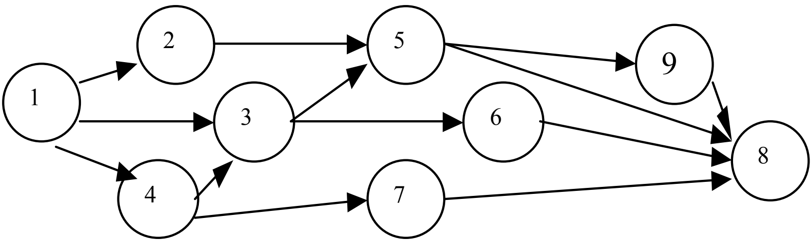


Рис. 6. Ранжирование вершин сетевого графика,
представленного на рис. 2, методом вычеркивания дуг

В результате указанных действий получим распределение вершин (расслоение) по рангам. Перенумеруем вершины в порядке возрастания рангов. При этом внутри слоя, т.е. множества вершин с одинаковым рангом, нумерация устанавливается произвольно. Результаты перенумерации вершин приведены в табл. 1.

Табл. 1

Ранг	0	1	2	3	4	5
Старые номера вершин	1	2,4	3,7	5,6	9	8
Новые номера вершин	1	2,3	4,5	6,7	8	9

После введения упорядоченной по рангам нумерации и расположения вершин в одном «слое» получим сетевой график, представленный на рис. 7.

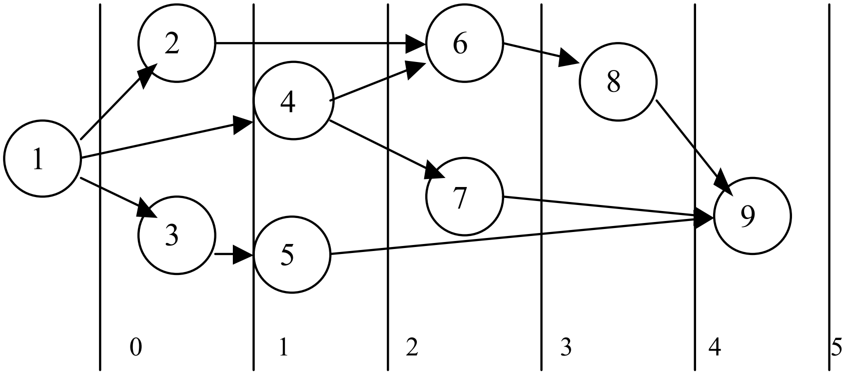


Рис. 7. Упорядоченный сетевой график

Перейдем теперь к построению сетевого графика, указанного в табл. 2, именами комплекса работ при капремонте агрегата.

Табл. 2

Имя работы	Опирается на работу	Нормальный срок, дни	Предельный срок, дни	Нормальная стоимость, тыс. р.	Предельная стоимость, тыс. р.
1	2	3	4	5	6
A	E, B	6	4	9	12
B	G, Q	5	2	9	18
C		24	20	36	44
D	F, H	6	5	9	11
E	V	12	12	18	18
F	E, B	6	4	9	13
G		15	14	18	20
H	G, Q	12	11	18	19
Q	V	11	9	9	13
V		6	6	9	9

Начинать построение нужно с отображения стрелками тех работ, которые не являются начальными в сетевом графике. В нашей задаче таковыми являются работы C, G и V. Они не опираются ни на какие работы. Их можно отмечать галочками или вычеркивать из списка и перейти к графическому отображению работ, которые непосредственно следуют за ними. Вычеркивая отображенные стрелками работы, находим в списке другие работы, которые опираются на показанные стрелками работы, и отображаем их графически. Так поступаем до тех пор, пока не будет исчерпан весь список заданных работ.

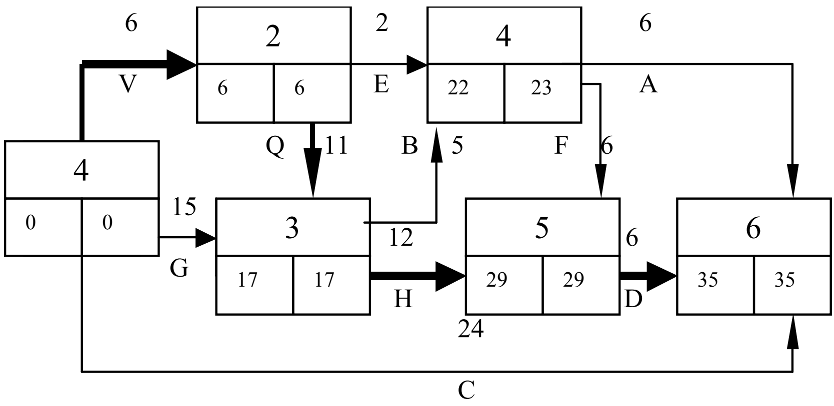


Рис. 8. Сетевой график работ

§ 2. Анализ сетевого графика и расчет его временных характеристик

Сетевой график отражает технологическую последовательность выполнения работ. Любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путем.* Так, последовательность работ $L = \{(3,4)(4,5)(5,6)\}$ образует путь, соединяющий третье и шестое события. Путь от начального события до конечного называется *полным путем*. Так, путь $L = \{(1,3)(3,5)(5,6)\}$ является одним из полных путей. Пути можно представить и в виде последовательности событий, через которые они проходят, или же перечнем имен работ, лежащих на пути. Так, первый путь можно указать таким образом: $L = \{3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6\}$ или $L = \{B, F, D\}$.

Если известны продолжительности работ t_{ij}, то для любого пути L может быть определена его продолжительность $t(L)$ как сумма продолжительностей его работ. Так, путь $L = \{V, Q, B\}$ имеет продолжительность $t(L) = 6 + 11 + 5 = 22$ (дн.).

Полный путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим,* а продолжительность критического пути называется *критическим временем* сетевого графика – $T^{кр}$. Критическое время – это наименьшее время выполнения проекта.

В сетевом графике реального проекта может быть много работ и полных путей. Поэтому перебор всех полных путей и поиск среди них критических (критических путей может быть несколько) практически осуществить невозможно. Определим критическое время сетевого графика $T^{кр}$ (и критический путь) с помощью ранних времен наступления событий.

Раннее время T_i^p наступления *i-го* события – это время, раньше которого *i-е* событие наступить не может. Каждое событие наступает только тогда, когда будут выполнены все работы на всех путях, ведущих от начального события графика к данному событию. Поэтому раннее время наступления *i-го* события равно наибольшей продолжительности путей, ведущих к *i-му* событию.

Рассчитаем T_i^p для каждого события. Срок наступления начального события графика будем условно считать нулевым, т.е. $T_1^p = 0$ (раннее время событий можно отмечать календарной датой). Далее можно определить T_2^p, так как второе событие наступает после работы (1, 2), которая выполняется сразу после начального события графика, раннее время для которого известно. (Во второй прямоугольник входит только одна стрелка, выходящая из первого прямоугольника, в котором уже написано раннее время наступления события 1). Итак, $T_2^p = T_1^p + t_{12} = 0 + 6 = 6$. Теперь можно определить T_3^p, т.к. к нему приводят две работы (две входящие стрелки в третий прямоугольник), выполняемые после событий 1 и 2, ранние времена которых уже определены. T_3^p рассчитывается по формуле

$$T_3^p = \max[T_1^p + t_{13}, T_2^p + t_{23}] = \max[0 + 15, 6 + 11] = 17$$

Аналогично продолжая, получим:

$$T_4^p = \max[T_2^p + t_{24}, T_3^p + t_{34}] = \max[6+12, 17+5] = 22,$$

$$T_5^p = \max[T_3^p + t_{35}, T_4^p + t_{45}] = \max[17+12, 22+6] = 29,$$

$$T_6^p = \max[T_4^p + t_{46}, T_5^p + t_{56}] = \max[22+6, 29+6] = 35$$

Итак, раннее время конечного события графика равно $T_6^p = 35$ дней = = $T^{кр}$, т.е. раньше 35 дней агрегат отремонтирован быть не может.

Найдем теперь критический путь $L^{кр}$ обратным ходом, двигаясь от конечного события графика к начальному. Срок 35 дней получен благодаря работе D, именно ее длительность определила максимум в формуле для вычисления T_6^p. Следовательно, работа D является критической, отметим ее жирной стрелкой. При определении T_5^p максимум достигнут благодаря длительности работы H, поэтому эта работа должна принадлежать критическому пути. Отметим ее также жирной стрелкой. Рассуждая аналогичным образом, находим следующий критический путь: $L^{кр} = \{V, Q, H, D\}$.

Этот путь имеет продолжительность $t(L^{кр}) = 6 + 11 + 12 + + 6 = 35$ дней. Определим стоимость ремонта агрегата при нормальном режиме выполнения работ: $S^{нор} = 9 + 9 + 36 + 9 + 18 + + 9 + 18 + 18 + 9 + 9 = 144$ тыс. р.

Рассчитаем еще одну характеристику сетевого графика – позднее время события.

Позднее время T_i^n наступления *i-го* события – это предельный срок, до которого может быть отложено наступление события без задержки всего проекта. Позднее время T_i^n определяется как разность между критическим временем и продолжительностью самого длительного пути, ведущего от данного события к конечному. Поздние времена событий вычисляются, начиная с конечного события графика. Полагаем $T_6^n = T_6^p = 35$. Далее находим событие, от которого приходим к конечному после выполнения только одной работы, т.е. находим прямоугольник с одной выходящей из него стрелкой к конечному событию. Это событие 5. Имеем $T_5^n = T_6^n - t_{56} = 35 - 6 = 29$. От события 4 ведут две стрелки к событиям 5 и 6, поздние времена для которых рассчитаны. Время T_4^n рассчитываем по формуле

$$T_4^n = \min\,[T_5^n - t_{45}, T_6^n - t_{46}] = \min\,[29 - 6, 35 - 6] = 23$$

Остальные все события лежат на критическом пути и являются критическими. Для них ранние и поздние времена совпадают, и потому их можно не считать (для события 5 можно было не считать T_5^n). Для некритических же событий позднее время рассчитывается по аналогии с событием 4.

1. Находим событие, для которого можно вычислить позднее время. Таким событием является событие с выходящими стрелками, ведущими к событиям с найденными поздними временами.

2. Из поздних времен следующих за данным событием соседних событий вычитаются длительности работ, приводящих к этим соседним событиям.

3. Искомое позднее время полагается равным минимуму из всех таких разностей.

Таким образом, имеем

$T_3^n = \min[T_5^n - t_{35}, T_4^n - t_{34}] = \min[29-12, 22-5] = 17$,

$T_2^n = \min[T_4^n - t_{24}, T_3^n - t_{23}] = \min[17-11, 22-12] = 6$,

$T_1^n = \min[T_6^n - t_{16}, T_3^n - t_{13}, T_2^n - t_{12}] = \min[35-24, 17-15, 6-6] = 0$

Значения временных характеристик события записывают в прямоугольник, который разбит на три части. Наверху стоят номера событий, в левой части раннее время их наступления, а в правой – позднее время.

С временными характеристиками событий сетевого графика связаны следующие временные характеристики работ.

Ранний срок $t_{ij}^{рн}$ *начала работы (i, j)* – время, раньше которого работа (i, j) не может быть начата. Оно определяется ранним временем наступления события i:

$$t_{ij}^{рн} = T_i^p$$

Ранний срок $t_{ij}^{ро}$ *окончания работы (i, j)* – время, раньше которого работа (i, j) не может быть окончена:

$$t_{ij}^{ро} = T_i^p + t_{ij}$$

Поздний срок t_{ij}^{no} *окончания работы (i, j)* – самый поздний срок, в который нужно уложиться с выполнением работы (i, j), чтобы не увеличилось критическое время сетевого графика:

$$t_{ij}^{no} = T_j^n$$

Поздний срок $t_{ij}^{пн}$ *начала работы (i, j)* – самый поздний срок начала работы (i, j), не влияющий на критическое время сетевого графика:

$$t_{ij}^{пн} = T_j^n - t_{ij}$$

Так, например, для работы (2,4) имеем:

– ранний срок начала $t_{24}^{рн} = T_2^p = 6$,

– ранний срок окончания $t_{24}^{ро} = T_2^p + t_{24} = 6 + 12 = 18$,

– поздний срок окончания $t_{24}^{no} = T_4^n = 23$,

– поздний срок начала $t_{24}^{пн} = T_4^n - t_{24} = 23 - 12 = 11$.

Интерес представляет анализ резервов времени для выполнения тех или иных работ. Различают несколько видов резервов времени, из которых основными являются:

– *полный резерв* времени работы (i, j) $R_{ij}^n = T_j^n - \left(T_i^p + t_{ij}\right)$,

– *свободный резерв* времени работы (i, j)

$$R_{ij}^c = T_j^p - \left(T_i^p + t_{ij}\right).$$

Полный резерв времени R_{ij}^n показывает, насколько можно увеличить время выполнения работы (i, j) с тем, чтобы срок

$T_к^р$ наступления конечного события не изменился, т.е. чтобы не увеличилось критическое время $T_{кр}$.

Свободный резерв времени R_{ij}^c показывает насколько можно увеличить время выполнения работы (i, j) с тем, чтобы не нарушались даже ранние сроки начала выполнения работ, непосредственно следующих за рассматриваемой.

Например, для работы (2,4) полный резерв времени составляет

$$R_{24}^n = T_4^n - \left(T_2^p + t_{24}\right) = 23 - \left(6 + 12\right) = 5\,,$$

а свободный –

$$R_{24}^c = T_4^p - \left(T_2^p + t_{24}\right) = 22 - \left(6 + 12\right) = 4\,.$$

Полный и свободный резервы времени могут использоваться для перенесения на более поздний срок начала выполнения работы, на увеличение продолжительности t_{ij}, на прерывание выполнения, если это технологически возможно, и на различные другие цели.

Очевидно, что согласно определению критического пути, критические работы не имеют резервов времени, и, наоборот, отсутствие полного резерва времени у работы служит признаком принадлежности ее к критическому пути.

§ 3. Ускорение капитального ремонта агрегата

Перед ремонтным предприятием поставлена задача завершения ремонта на три дня раньше рассчитанного при нормальном режиме выполнения работ критического времени $T_{кр}$ = 35 дней, причем сделать это нужно с наименьшими дополнительными затратами. Ясно, что уменьшить сроки ремонта можно лишь путем ускорения критических работ сетевого графика. По условию задачи, некоторые работы можно выполнять в ускоренном режиме. Для таких работ в табл. 2 заданы две длительности, одна из которых соответствует нормальному режиму ее выполнения, а другая – предельному или срочному режиму. Возможны и промежуточные (ускоренные) режимы, причем будем считать, что денежные затраты на ускорение возрастают прямо пропорционально времени ускорения, т.е. дополнительные затраты на один день ускорения Δ рассчитываются по формуле $\Delta = \dfrac{c_{ij}^{с} - c_{ij}^{н}}{t_{ij}^{н} - t_{ij}^{с}}$, где $t_{ij}^{н}$, $c_{ij}^{н}$, $t_{ij}^{с}$, $c_{ij}^{с}$ – длительности и стоимости работы (i, j) при нормальном и срочном режимах ее выполнения.

Рассчитанные по этой формуле затраты на ускорение показаны в табл. 3.

Табл. 3

Работа	A	B	C	D	E	F	G	H	Q	V
Возможное уменьшение длительности, дни	2	3	4	1	–	2	1	1	2	–
Затраты на ускорение, тыс. р.	1,5	3	2	2	–	2	2	1	2	–

Например, $\Delta_A = \dfrac{12-9}{6-4} = 1{,}5$, $\Delta_B = \dfrac{18-9}{5-2} = 3$. Работы E, V нельзя выполнить в ускоренном режиме, поэтому в соответствующих им столбцах поставлены прочерки.

Так как критическое время сетевого графика определяется длительностями критических работ, то уменьшение этого времени может быть осуществлено только за счет ускорения критических работ. Критический срок будем сокращать последовательно по одному дню, причем после каждого такого сокращения будем смотреть, не появились ли новые критические пути в сетевом графике. Появление новых критических путей потребует сокращения и их продолжительностей, чтобы уложиться в заданное директивное время. Для сокращения срока завершения строительства на один день может потребоваться, следовательно, ускорение не одной работы, а сразу нескольких. Будем находить в этом случае такие работы, чтобы общие дополнительные затраты на ускорение всех работ, приводящих к уменьшению критического времени на один день, были минимальными.

Заложенный в таком подходе принцип оптимизации одного шага (сокращение на один день) приводит к эвристическому алгоритму, который не всегда гарантирует получение оптимальной стратегии ускорения. Иногда эта стратегия может быть приближенно-оптимальной.

На критическом пути $L^{кр} = \{V, Q, H, D\}$ наименьшие затраты на ускорение имеет критическая работа H, т.к. $\Delta_H = \min\{\Delta_Q, \Delta_H, \Delta_D\} = = \min\{2, 1, 2\} = 1$ тыс. р. Ускорим работу H на один день. После ее ускорения новое критическое время станет равным 34 дням и появится еще один критический путь $\{V, Q, B, F, D\}$,

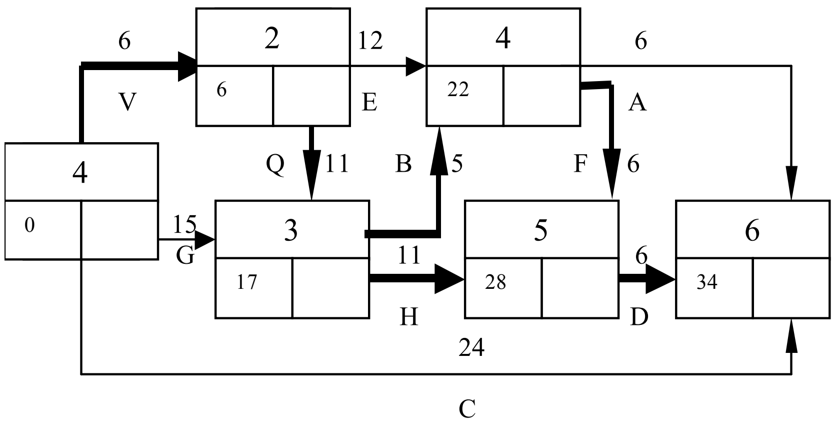


Рис. 9. Сетевой график при ускоренном на 1 день режиме работ

Результаты ускорения ремонта на 1 день представим так: ускоряемая работа – *H*, новая длительность – 11 дней, затраты на ускорение – 1 тыс. р.

Критические пути с временем завершения – 34 дней; суммарная стоимость – 145 тыс. р.

$$L_1^{кр}: \overset{V}{1\Rightarrow 2}\overset{Q}{\Rightarrow 3}\overset{H}{\Rightarrow 5}\overset{D}{\Rightarrow 6}$$

$$L_2^{кр}: \overset{V}{1\Rightarrow 2}\overset{Q}{\Rightarrow 3}\overset{B}{\Rightarrow 4}\overset{F}{\Rightarrow 5}\overset{D}{\Rightarrow 6}$$

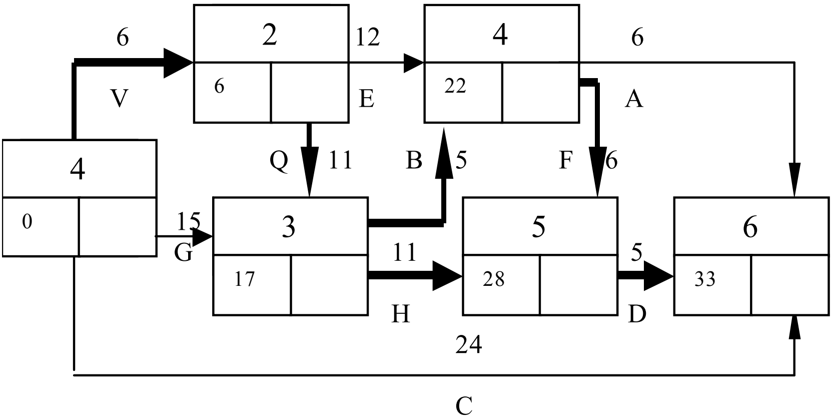


Рис. 10. Сетевой график после ускорения на 2 дня

Работу *H* дальше ускорять нельзя, т.к. возможное уменьшение ее длительности равно одному дню (см. табл. 2), который уже использован. Из других критических работ, допускающих ускорение, наименьшие затраты на ускорение, равные 2 тыс. р., имеют работы *D*, *F* и *Q*. Из этих работ следует исключить работу *F*, так как она принадлежит лишь одному из двух критических путей и ее ускорение не уменьшит время завершения ремонта агрегата. Поэтому целесообразнее ускорить либо работу D, либо работу Q, которые принадлежат обоим критическим путям.

Выберем, например, работу D. Получим новый сетевой график с прежними критическими путями, где длительность работы D будет теперь рана 5 дням.

Результаты ускорения: ускоряемая работа – D, новая длительность – 5дней, затраты на ускорение – 2 тыс. р.

Критические пути с временем завершения – 33 дня, суммарная стоимость – 147 тыс. р.

$$L_1^{кр}: \; 1 \overset{V}{\Rightarrow} 2 \overset{Q}{\Rightarrow} 3 \overset{H}{\Rightarrow} 5 \overset{D}{\Rightarrow} 6$$

$$L_2^{кр}: \; 1 \overset{V}{\Rightarrow} 2 \overset{Q}{\Rightarrow} 3 \overset{B}{\Rightarrow} 4 \overset{F}{\Rightarrow} 5 \overset{D}{\Rightarrow} 6$$

Ускорим теперь работу Q на 1 день (работу D дальше ускорять нельзя), получим следующий график.

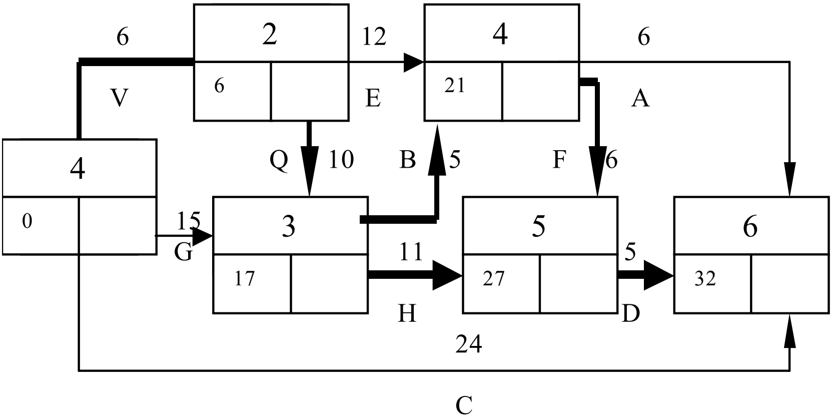


Рис. 11. Сетевой график при срочном режиме работы

Ускоряемая работа – Q, новая длительность – 10 дней, затраты на ускорение – 2 тыс. р.

Критические пути с временем завершения – 32 дня, суммарная стоимость – 149 тыс. р.

$$L_1^{кр}: \begin{array}{c} \quad V \quad\; Q \quad\; H \quad\; D \\ 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \end{array}$$

$$L_2^{кр}: \begin{array}{c} \quad V \quad\; Q \quad\; B \quad\; F \quad\; D \\ 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \end{array}$$

Итак, при нормальном режиме:

Критическое время – 35 дней,

Критический путь – $\{V, Q, H, D\}$,

Стоимость – 144 тыс. р.

При ускоренном режиме:

Директивный срок – 32 дня,

Критические пути – $\{V, Q, H, D\}$, $\{V, Q, B, F, D\}$,

Стоимость – 149 тыс. р.

Индивидуальные задания

Задача №1.

Решив графически двойственную задачу, найти решение исходной задачи.

1. $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le -16$ **,**

$-2x_1 \; -x_2 \; -x_3 \qquad \le -10$ **,**

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0$,

$-16x_1 - 17x_2 - 17x_3 - 6x_4 \to$ **max.**

2. $-2x_1 - x_2 \; + x_4 - 2x_5 + 2x_6 \le -12,$

$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \; -x_5 \le -9,$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0, \; x_6 \ge 0$ **,**

$-13x_1 - 7x_2 - 10x_3 - 8x_4 - 5x_5 \to$ **max.**

3. $x_1 \qquad - \mathbf{2}\, x_3 \quad + x_5 \quad - \mathbf{2}\, x_6 \le \mathbf{-9},$

$x_1 \quad + \mathbf{2}\, x_2 \quad + x_3 \quad - x_5 \quad + x_6 \ge \mathbf{4},$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0, \; x_6 \ge 0$ **,**

$\mathbf{-2}\, x_1 - \mathbf{16}\, x_2 - \mathbf{20}\, x_3 - x_4 + \mathbf{9}\, x_5 - \mathbf{13}\, x_6 \to$ **max.**

4. $\qquad \mathbf{-2}\, x_2 \qquad + x_4 \quad - x_5 + \mathbf{2}\, x_6 \le \mathbf{11},$

$\mathbf{-2}\, x_1 + \mathbf{2}\, x_2 + \mathbf{2}\, x_3 + \mathbf{2}\, x_4 + \mathbf{2}\, x_5 + \mathbf{2}\, x_6 \ge \mathbf{14},$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0, \; x_6 \ge 0$ **,**

$\mathbf{4}\, x_1 - \mathbf{22}\, x_2 - \mathbf{16}\, x_3 - \mathbf{8}\, x_4 - \mathbf{19}\, x_5 - \mathbf{6}\, x_6 \to$ **max.**

5. $- x_1 \; + x_2 + \mathbf{2}\, x_3 + x_4 + x_5 \le \mathbf{12},$

$- x_1 - \mathbf{2}\, x_2 \qquad - \mathbf{2}\, x_5 \ge \mathbf{-8},$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0,$

$\mathbf{-2}\, x_1 + x_2 + \mathbf{4}\, x_3 \quad + \mathbf{4}\, x_5 \to$ **max.**

6. $\mathbf{-2}\, x_1 \quad + x_3 - \mathbf{2}\, x_4 \; + x_5 \le \mathbf{1},$

$\mathbf{2}\, x_1 + x_2 \qquad - x_4 + \mathbf{2}\, x_5 \le \mathbf{7},$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0,$

$- x_1 + \mathbf{5}\, x_2 + \mathbf{2}\, x_3 - \mathbf{23}\, x_4 + \mathbf{15}\, x_5 \to$ **max.**

7. $-x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le -4,$

$-x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 \ge -8,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 + 4x_5 \to \max.$

8. $x_1 + x_2 - 2x_4 + x_6 \le 2,$

$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 \ge 0,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$2x_1 + 3x_2 - 13x_4 - 4x_5 + 6x_6 \to \max.$

9. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \le 14,$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \le 1,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$7x_1 + 4x_3 - x_5 \to \max.$

10. $2x_2 + x_3 - x_4 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 - x_4 \le 6,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0,$

$5x_1 + 20x_2 + 8x_3 - 16x_4 \to \max.$

11. $-2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -6,$

$2x_1 - 2x_4 \le 0,$

$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$

$-10x_1 + 8x_4 \to \min.$

12. $-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \le -13,$

$2x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 \ge -4,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-19x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 2x_6 \to \max.$

13. $2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \ge 10,$

$2x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 \le 14,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_5 - 2x_6 \to \max.$

14. $-2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \quad + 2x_6 \le 0,$

$-x_1 - 2x_2 \quad + x_4 - x_5 - 2x_6 \le -12,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-20x_1 - 16x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 5x_5 + 4x_6 \to \max.$

15. $-x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 \le -5,$

$-2x_1 - x_2 - x_3 \quad + 2x_5 \quad \le -7,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-12x_1 - x_2 - 12x_3 + 3x_4 - x_5 - 13x_6 \to \max.$

16. $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \le -12,$

$-2x_1 - x_2 \quad + 2x_4 - x_5 \ge -8,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$4x_1 + 11x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 7x_5 \to \min.$

17. $x_1 - x_2 - 2x_3 \quad \ge 0,$

$-2x_2 + x_3 + x_4 \ge 1,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$-3x_1 - 5x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max.$

18. $2x_1 \quad - x_3 + 2x_4 - x_5 \le 10,$

$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \le 1,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$3x_2 + 11x_3 - 11x_4 + 16x_5 \to \min.$

19. $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \ge -5,$

$-x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \le 5,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$-7x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 28x_4 + 2x_5 \to \max.$

20. $-2x_1 - x_2 - x_3 \quad + 2x_5 \ge 0,$

$-x_1 - 2x_2 \quad + x_4 - 2x_5 \le -15,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$3x_1 - 10x_2 + x_3 + 2x_4 - 18x_5 \to \max.$

21. $x_2 - 2x_3 + x_4 \le 2,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 1,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,$
$2x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \max.$

22. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \le -1,$
$-x_1 + 2x_3 - x_5 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,$
$-2x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 7x_5 \to \max.$

23. $-x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -8,$
$-x_1 + x_3 - 2x_4 \le -10,$
$x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,$
$x_1 + 2x_2 \to \min.$

24. $-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \le -6,$
$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 \le 8,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,\ \ x_6 \ge 0,$
$-19x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + x_6 \to \max.$

25. $-x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 0,$
$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 \ge -3,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,$
$3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 + 9x_5 \to \max.$

26. $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \le 9,$
$-2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \le -12,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,$
$-6x_1 - 16x_2 - 13x_4 + x_5 \to \max.$

27. $x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \le -5,$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \ge 15,$
$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,$
$-x_1 + 2x_2 - 14x_3 + 2x_4 - 17x_5 \to \max.$

28. $-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 5,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

$13x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 8x_5 \to \max.$

29. $-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 \ge -2,$

$-2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 \le 2,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-4x_1 + 2x_3 - 13x_5 + 6x_6 \to \max.$

30. $x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 \le -4,$

$-x_1 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 2x_6 \le 5,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

$-2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 - 7x_6 \to \max.$

Задача №2.

Решить симплексным методом, контролируя вычисления.

1.
$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 17,\\
-2x_2 &\le -3,\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 2,\\
-x_1 - 2x_2 - x_3 &\le -11,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-x_1 - 8x_2 &\to \max.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
x_2 - x_3 &\le 8,\\
-2x_1 - x_2 &\le -15,\\
2x_1 - x_2 - 2x_3 &\le 8,\\
x_2 - 2x_3 &\le 5,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-8x_1 - 13x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\le -6,\\
-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &\ge -14,\\
-x_1 - x_2 + x_3 &\le 5,\\
-2x_1 + x_2 + x_3 &\le 11,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-x_1 + 8x_2 &\to \max.
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 - x_3 &\le -3,\\
-x_1 + x_3 &\ge 1,\\
-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\ge 8,\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 7,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
6x_1 + 8x_2 - x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - 2x_3 &\ge -1,\\
x_2 - 2x_3 &\le 5,\\
x_1 + 2x_2 &\ge 7,\\
-2x_2 &\ge -6,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
3x_1 + x_3 &\to \min.
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &\le 9,\\
2x_1 - x_2 - 2x_3 &\ge 9,\\
-x_1 + 2x_3 &\le -5,\\
-x_2 + x_3 &\le -1,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-5x_1 - 4x_2 + 6x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 &\le -2,\\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\le 6,\\
2x_1 + x_2 + x_3 &\le 8,\\
-x_2 + x_3 &\ge 3,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-18x_2 + 10x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 14,\\
x_1 - x_3 &\ge -5,\\
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\ge 2,\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 27,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
-7x_1 + 4x_2 - 10x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &\le -1,\\
2x_1 &\le 8,\\
2x_1 - x_2 - x_3 &\le 5,\\
x_1 - 2x_2 + x_3 &\ge -2,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ &x_3 \ge 0,\\
14x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_3 \ge 8,\\
&-x_1 - 2x_3 \le -3,\\
&2x_2 - x_3 \le -2,\\
&-x_1 + 2x_3 \le 2,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&4x_1 + 5x_3 \to \min.
\end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned}
&-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 0,\\
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 4,\\
&x_1 - x_3 \le -1,\\
&2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 0,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le -1,\\
&-x_1 - x_2 \le -8,\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2,\\
&-x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -13,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&-6x_1 + 2x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 \ge -10,\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1,\\
&-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le -8,\\
&-x_1 - x_2 \ge -5,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned}
&2x_3 \le 4,\\
&-x_1 - x_2 \le -4,\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le 0,\\
&-x_1 - x_2 \le -2,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&-2x_1 - x_2 + 10x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned}
&-2x_2 + x_3 \le -4,\\
&2x_1 + x_2 \le 5,\\
&-2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 7,\\
&-x_2 + x_3 \ge -4,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&8x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 \ge 5,\\
&-2x_1 + x_2 + 2x_3 \le -3,\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&-2x_1 + x_2 + x_3 \le -1,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&-11x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le 0,\\
&-2x_1 - 2x_2 - x_3 \le -10,\\
&x_2 - x_3 \le 3,\\
&2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le -1,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&-8x_1 - 7x_2 - 8x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned}
&-x_2 + x_3 \le -1,\\
&2x_1 + x_2 \le 5,\\
&-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 3,\\
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 18,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&3x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6,\\
&x_1 - 2x_3 \le 3,\\
&x_1 + 2x_2 \le 4,\\
&-x_1 + 2x_2 - x_3 \le 0,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\\
&2x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \max.
\end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned}
-x_1-2x_2 \quad\quad &\ge -10,\\
2x_2 - x_3 &\ge 9,\\
-x_1+x_2+2x_3 &\le 7,\\
x_1 \quad\quad - x_3 &\le 0,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-x_1+15x_2+10x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned}
-x_1+2x_2-x_3 &\le 5,\\
-x_1 \quad\quad + x_3 &\le 1,\\
-x_1-2x_2-x_3 &\le -5,\\
2x_2-x_3 &\ge 3,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
11x_1+8x_2+x_3 &\to \min.
\end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+2x_3 &\le 3,\\
-2x_1-2x_2-2x_3 &\le -6,\\
-x_1 \quad\quad + x_3 &\ge 2,\\
-2x_1+x_2+x_3 &\ge 3,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-4x_1-6x_2 &\to \max.
\end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned}
-x_2+2x_3 &\le 1,\\
-x_1-2x_2 \quad\quad &\ge -2,\\
-2x_2+x_3 &\ge -1,\\
x_1-x_2+2x_3 &\ge 1,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
x_2+6x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad - x_3 &\ge 1,\\
x_1+2x_2 \quad\quad &\le 3,\\
-x_1+2x_2-2x_3 &\ge 1,\\
2x_1-2x_2-2x_3 &\le 0,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
5x_1+2x_2+x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned}
2x_1-x_2-x_3 &\le 9,\\
2x_2-x_3 &\ge 4,\\
-2x_1 \quad\quad + x_3 &\le -4,\\
-x_1-2x_2 \quad\quad &\le -8,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-2x_1-14x_2+2x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+2x_3 &\le 0,\\
-x_1-2x_2-x_3 &\le -12,\\
2x_2 \quad\quad &\ge 8,\\
-x_1+x_2-2x_3 &\ge 0,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
2x_1+10x_2+4x_3 &\to \min.
\end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3 &\ge 15,\\
-x_2+2x_3 &\le -2,\\
-2x_1+2x_2-2x_3 &\ge 0,\\
2x_1+2x_2+2x_3 &\ge 20,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-2x_1-14x_2-4x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned}
2x_1+x_2+x_3 &\ge 9,\\
-x_2+x_3 &\ge 3,\\
-2x_1+x_2+2x_3 &\le 0,\\
x_1 \quad\quad - 2x_3 &\le -1,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-8x_1+2x_2+7x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned}
-2x_1-2x_2-2x_3 &\le -5,\\
-x_1 \quad\quad + x_3 &\le 3,\\
-x_1+2x_2-2x_3 &\le -9,\\
-2x_1-x_2-x_3 &\ge -6,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ & x_3\ge 0,\\
-9x_1+3x_2-3x_3 &\to \max.
\end{aligned}$$

30. $x_1 - 2x_2 + x_3 \le -3,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -2,$
$-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6,$
$x_1 + x_2 \ge 6,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$
$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

Задача №3.

Решить транспортную задачу, начиная методом северо-западного угла.

1. $a_1 = 20,\ a_2 = 18,\ a_3 = 22,\ a_4 = 22,$
$b_1 = 15,\ b_2 = 36,\ b_3 = 3.$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. $a_1 = 5,\ a_2 = 34,\ a_3 = 5,$
$b_1 = 6,\ b_2 = 34,\ b_3 = 15,\ b_4 = 17.$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. $a_1 = 20,\ a_2 = 18,\ a_3 = 22,\ a_4 = 22,$
$b_1 = 15,\ b_2 = 36,\ b_3 = 3.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. $a_1 = 30,\ a_2 = 34,\ a_3 = 7,\ a_4 = 8,$
$b_1 = 25,\ b_2 = 26,\ b_3 = 6.$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. $a_1 = 13,\ a_2 = 4,\ a_3 = 28,$
$b_1 = 21,\ b_2 = 2,\ b_3 = 6,\ b_4 = 34.$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. $a_1 = 18,\ a_2 = 34,\ a_3 = 18,$
$b_1 = 30,\ b_2 = 13,\ b_3 = 11,\ b_4 = 37.$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. $a_1 = 4,\ a_2 = 23,\ a_3 = 13,$
$b_1 = 14,\ b_2 = 27,\ b_3 = 4,\ b_4 = 13.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. $a_1 = \mathbf{19},\ a_2 = \mathbf{15},\ a_3 = \mathbf{35},\ a_4 = \mathbf{21},$
$b_1 = \mathbf{24},\ b_2 = \mathbf{15},\ b_3 = \mathbf{27}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. $a_1 = \mathbf{7},\ a_2 = \mathbf{9},\ a_3 = \mathbf{7},$
$b_1 = \mathbf{8},\ b_2 = \mathbf{19},\ b_3 = \mathbf{11},\ b_4 = \mathbf{19}.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. $a_1 = \mathbf{17},\ a_2 = \mathbf{12},\ a_3 = \mathbf{7},\ a_4 = \mathbf{23},$
$b_1 = \mathbf{12},\ b_2 = \mathbf{17},\ b_3 = \mathbf{2}.$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. $a_1 = \mathbf{17},\ a_2 = \mathbf{26},\ a_3 = \mathbf{14},\ a_4 = \mathbf{6},$
$b_1 = \mathbf{7},\ b_2 = \mathbf{22},\ b_3 = \mathbf{14}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. $a_1 = \mathbf{12},\ a_2 = \mathbf{3},\ a_3 = \mathbf{24},\ a_4 = \mathbf{30},$
$b_1 = \mathbf{17},\ b_2 = \mathbf{12},\ b_3 = \mathbf{17}.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. $a_1 = \mathbf{29},\ a_2 = \mathbf{18},\ a_3 = \mathbf{19},$
$b_1 = \mathbf{31},\ b_2 = \mathbf{25},\ b_3 = \mathbf{2},\ b_4 = \mathbf{23}.$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. $a_1 = \mathbf{7},\ a_2 = \mathbf{16},\ a_3 = \mathbf{23},\ a_4 = \mathbf{20},$
$b_1 = \mathbf{32},\ b_2 = \mathbf{14},\ b_3 = \mathbf{32}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. $a_1 = \mathbf{12},\ a_2 = \mathbf{19},\ a_3 = \mathbf{45},$
$b_1 = \mathbf{30},\ b_2 = \mathbf{5},\ b_3 = \mathbf{33},\ b_4 = \mathbf{26}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

16. $a_1 = \mathbf{9},\ a_2 = \mathbf{25},\ a_3 = \mathbf{12},$
$b_1 = \mathbf{20},\ b_2 = \mathbf{4},\ b_3 = \mathbf{18},\ b_4 = \mathbf{16}.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. $a_1 = \mathbf{34},\ a_2 = \mathbf{7},\ a_3 = \mathbf{29},$
$b_1 = \mathbf{12},\ b_2 = \mathbf{26},\ b_3 = \mathbf{16},\ b_4 = \mathbf{39}.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

18. $a_1 = \mathbf{12},\ a_2 = \mathbf{44},\ a_3 = \mathbf{1},$
$b_1 = \mathbf{12},\ b_2 = \mathbf{22},\ b_3 = \mathbf{16},\ b_4 = \mathbf{10}.$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

19. $a_1 = \mathbf{4},\ a_2 = \mathbf{8},\ a_3 = \mathbf{14},$
$b_1 = \mathbf{6},\ b_2 = \mathbf{14},\ b_3 = \mathbf{14},\ b_4 = \mathbf{10}.$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. $a_1 = \mathbf{28},\ a_2 = \mathbf{43},\ a_3 = \mathbf{9},$
$b_1 = \mathbf{17},\ b_2 = \mathbf{31},\ b_3 = \mathbf{16},\ b_4 = \mathbf{17}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. $a_1 = \mathbf{6},\ a_2 = \mathbf{11},\ a_3 = \mathbf{33},\ a_4 = \mathbf{23},$
$b_1 = \mathbf{7},\ b_2 = \mathbf{13},\ b_3 = \mathbf{18}.$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

22. $a_1 = \mathbf{17},\ a_2 = \mathbf{24},\ a_3 = \mathbf{8},$
$b_1 = \mathbf{10},\ b_2 = \mathbf{22},\ b_3 = \mathbf{14},\ b_4 = \mathbf{12}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

23. $a_1 = \mathbf{20},\ a_2 = \mathbf{8},\ a_3 = \mathbf{6},$
$b_1 = \mathbf{8},\ b_2 = \mathbf{34},\ b_3 = \mathbf{6},\ b_4 = \mathbf{4}.$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

24. $a_1 = \mathbf{12},\ a_2 = \mathbf{12},\ a_3 = \mathbf{25},\ a_4 = \mathbf{21},$
$b_1 = \mathbf{16},\ b_2 = \mathbf{18},\ b_3 = \mathbf{30}.$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

25. $a_1 = \mathbf{21},\ a_2 = \mathbf{20},\ a_3 = \mathbf{2},$
$b_1 = \mathbf{5},\ b_2 = \mathbf{37},\ b_3 = \mathbf{18},\ b_4 = \mathbf{1}.$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

26. $a_1 = \mathbf{23},\ a_2 = \mathbf{53},\ a_3 = \mathbf{9},\ a_4 = \mathbf{3},$
$b_1 = \mathbf{15},\ b_2 = \mathbf{30},\ b_3 = \mathbf{18}.$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

27. $a_1 = \mathbf{8},\ a_2 = \mathbf{6},\ a_3 = \mathbf{25},\ a_4 = \mathbf{7},$
$b_1 = \mathbf{2},\ b_2 = \mathbf{8},\ b_3 = \mathbf{13}.$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 6 & 6\\ 3 & 5 & 5\\ 6 & 9 & 3\\ 3 & 9 & 6\end{pmatrix}.$$

28. $a_1 = \mathbf{19},\ a_2 = \mathbf{19},\ a_3 = \mathbf{20},\ a_4 = \mathbf{13},$

$b_1 = \mathbf{9},\ b_2 = \mathbf{36},\ b_3 = \mathbf{15}.$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ 3 & 5 & 4\\ 5 & 9 & 2\\ 2 & 9 & 5\end{pmatrix}.$$

29. $a_1 = \mathbf{9},\ a_2 = \mathbf{20},\ a_3 = \mathbf{3},\ a_4 = \mathbf{6},$

$b_1 = \mathbf{14},\ b_2 = \mathbf{3},\ b_3 = \mathbf{5}.$

$$C=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 8 & 5 & 3\\ 8 & 8 & 5\\ 4 & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

1.

30. $a_1 = \mathbf{29},\ a_2 = \mathbf{36},\ a_3 = \mathbf{2},\ a_4 = \mathbf{32},$

$b_1 = \mathbf{19},\ b_2 = \mathbf{49},\ b_3 = \mathbf{17}.$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Задача №4.

Найти решение матричной игры графическим и линейно-программным способами.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 4 & 2\\ -5 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\\ -4 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}9 & -3 & 9 & 10\\ 7 & 9 & -3 & 9\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3 & -3\\ 5 & -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 4 & 7\\ -6 & 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -3 & -1\\ -4 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -7 & -4\\ -6 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 6 & 5\\ 4 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -5 & 4\\ 3 & 0\\ -7 & -2\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}9 & 4 & 6 & -3\\ 6 & 3 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}12 & 8 & 7 & 1\\ 9 & 7 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}-10 & -5\\ -4 & 1\\ 5 & -5\\ -7 & -3\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}-5 & -6\\ -6 & 6\\ -2 & -6\\ -8 & -9\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & -4\\ -9 & -4\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}-7 & -9\\ -8 & -12\\ -1 & -9\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & 2 & 9\\ 3 & 9 & -3 & 9\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -2 & 0\\ 5 & -4\\ -3 & -4\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -5 & 2\\ -1 & -6 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}-12 & 3 & 5 & 3\\ 0 & -5 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ -3 & -4\\ 3 & -1\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ 0 & 1\\ 9 & -3\\ -4 & -1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -9 & -7\\ -11 & -9\\ 3 & -9\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -4 & -3\\ -7 & -4\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 5 & -10\\ -8 & -7\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -12 & -8\\ -6 & -4\\ 1 & -4\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}-9 & 1 & 3 & 4\\ 3 & -7 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -5 & 0\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}3 & -9\\ -9 & -7\\ -9 & 3\\ -10 & -9\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}3 & -9\\ -9 & -7\\ -9 & 3\\ -10 & -9\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ -6 & -8\\ -5 & 7\\ -6 & -11\end{pmatrix}$.

Литература

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. В. Математическое программирование. –М.: Высшая школа, 1980.
3. Бахтин А. Е., Савиных В. Н. Математическое программирование: Методические указания / НИНХ. – Новосибирск, 1990.
4. Бахтин А. Е. Математическое моделирование в экономике. Лекции и методические указания / НГАЭиУ. – Новосибирск, 1994.
5. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.: Высшая школа, 1967.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Глава 1... 6
§1. Сущность процесса моделирования.. 6
§2. Основные этапы математического моделирования................ 8
§ 3.Формулировка задачи линейного программи-
рования.. 11
Глава 2... 22
§ 1. Различные формы модели задач линейного программи-
рования.. 22
§ 2. Элементы теории двойственности 26
Глава 3. Графический метод 29
Глава 4. Симплекс-метод 37
§ 1. Подготовка задачи к решению (составление
начальной симплексной таблицы) 38
§ 2. Общее описание симплекс-метода....................................... 41
§ 3. Численное решение примера.. 45
Глава 5. Транспортная задача 54
§ 1. Модели транспортных задач и их основные свойства 54
§ 2. Правило северо-западного угла... 62
§ 3. Метод потенциалов... 65
Глава 6. Теория игр 80
§ 1. Общие сведения 80
§ 2. Графический способ решения матричной игры 86

§ 3. Линейно-программный способ решения матричной игры 94
Глава 7. Моделирование процессов наилучшего использования ресурсов 100
§ 1. Математическая модель наилучшего использования ресурсов 100
§ 2. Понятие двойственности, двойственные оценки и их применение в экономическом анализе 103
§ 3. Построение функции предельной эффективности ресурсов 113
§ 4. Моделирование механизмов оптимального распределения ресурсов. Централизованное распределение и рыночный механизм 122
§ 5. Моделирование процессов наилучшего распределения ресурсов методом динамического программирования 138
Глава 8. Сетевые модели планирования и управления 154
§ 1. Основные понятия сетевого графика и его упорядочение 154
§ 2. Анализ сетевого графика и расчет его временных характеристик 161
§ 3. Ускорение капитального ремонта агрегата 169

Индивидуальные задания 175
Литература 188

БАБИН Владислав Николаевич
ГРУНИНА Мария Викторовна
ДЕМЕНТЬЕВ Александр Дмитриевич
ШЕФЕЛЬ Валентина Гавриловна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие и индивидуальные задания

2-е издание, стереотипное

Редактор Н.К. КРУПИНА

Подписано к печати 24 ноября 2015 г. Формат 60x84 1/16
Объем 6,9 уч.-изд.л. Тираж 200 экз.
Отпечатано в Издательском центре НГАУ «Золотой колос»
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160