

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Теория игр и экономическое поведение

Методические указания по проведению практических занятий,
самостоятельному изучению дисциплины и выполнению
контрольной работы

38.03.01 *Экономика*

38.03.02 *Менеджмент*

38.03.03 *Управление персоналом*

38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*

43.03.01 *Сервис*

Новосибирск 2024

Рецензент: кандидат техн. наук, доцент Е.Ю. Тарсис

Теория игр и экономическое поведение: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина. – Новосибирск, 2024. – 27 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление; 43.03.01 Сервис.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №8 от 23 апреля 2024 г.).

Оглавление

1. Введение	4
2. Методические указания по выполнению контрольной работы	5
3. Задания для контрольной работы	6
4. Примеры решения задач контрольной работы	9
5. Задания для практических занятий	21
6. Задания к зачету	25
6. Список основной литературы	26

1. Введение

Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания теории игр и экономического поведения в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ теории игр, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

- познакомить студентов с идеями и методами теории игр,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием инструментария теории игр.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, виды финансовой, бухгалтерской информации, содержащейся в отчетности предприятий различных форм собственности;

- последовательность принятия управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятия;

уметь:

- применять соответствующие инструментальные средства для обработки экономических данных, использовать результаты анализа этой информации для обоснования выводов по комплексной оценке, финансового состояния хозяйствующего субъекта;

- выявлять проблемы экономического характера при анализе конкретных ситуаций, предлагать способы их решения с учетом критериев социально-экономической эффективности, оценки рисков и возможных социально-экономических последствий;

- обосновывать выбор того или иного варианта управленческого финансового решения на основе всесторонней критической оценки;

владеть:

- методологией экономического исследования; навыками применения современного математического инструментария для решения задач, связанных с расчетом параметров, необходимых для принятия решений в области оценки финансового состояния организации, кредитоспособности заемщиков, страхования рисков, инвестиционной привлекательности активов

- навыками формулировки и обоснования предложений по совершенствованию управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятий

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер группы.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно**. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы**, то она **не будет зачтена**.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач контрольной работы по вариантам	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

3. Задания для контрольной работы

Задачи 1-10.

Найти решение матричной игры графическим и линейно-программным способами.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & 2 \\ -5 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$	2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \\ -4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$
3. $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$	4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & 7 \\ -6 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$	6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$
7. $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -7 & -4 \\ -6 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$	8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$
9. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}.$	10. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$

Задачи 11-20.

Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах $S=5-8$ единиц, расходы по хранению одной единицы товара составляют s руб., а расходы по завозу единицы товара k руб., цена за единицу товара составляет p руб. Составить платежную матрицу, элементами которой является

прибыль магазина (доход от продажи с учетом расходов по хранению или по завозу). Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров, используя критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа, Гурвица при $\alpha = 0,2$ и $0,8$.

11. $p=300, c=50, k=70$	12. $p=350, c=60, k=70$
13. $p=400, c=50, k=90$	14. $p=210, c=70, k=60$
15. $p=410, c=50, k=80$	16. $p=290, c=40, k=60$
17. $p=250, c=30, k=90$	18. $p=310, c=40, k=70$
19. $p=320, c=40, k=90$	20. $p=250, c=50, k=60$

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти решение матричной игры графическим и линейно-программным способами $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Графически решаются задачи в случае, когда у одного из игроков всего лишь две чистые стратегии. В рассматриваемом примере у игрока I две стратегии, а у игрока II – четыре стратегии.

Игроку I нужно определить свою оптимальную (максиминную) стратегию $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, а игроку II – оптимальную (минимаксную) стратегию $q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$, необходимо также определить цену игры v , показывающую ожидаемый средний выигрыш игрока I и, соответственно, проигрыш игрока II при оптимальном их поведении.

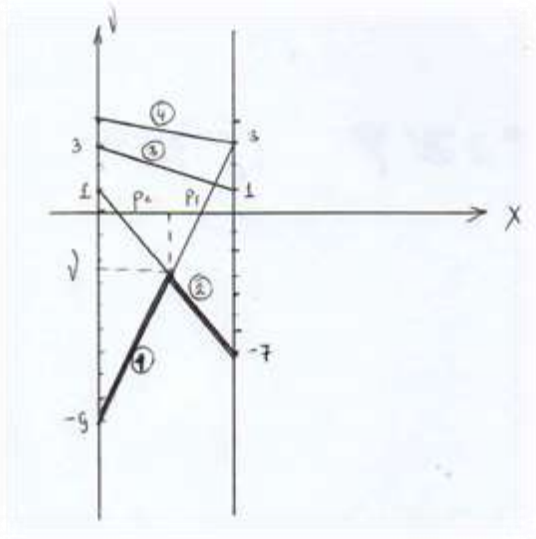
Графически решается задача игрока, имеющего две стратегии, т.е. в нашем случае задача игрока I. Оптимальная стратегия игрока II находится аналитическим путем после решения задачи игрока I.

Графические построения осуществляются следующим образом. На горизонтальной прямой берется отрезок единичной длины. Каждой точке этого отрезка сопоставляется смешанная стратегия $p = (p_1, p_2)$ игрока I по следующему правилу: p_1 – это расстояние от точки до правого конца отрезка, а p_2 – расстояние от точки до левого конца отрезка.

Любой смешанной стратегии игрока I на единичном отрезке будет отвечать некоторая единственная точка, построенная по указанному правилу. Таким образом, между точками отрезка и смешанными стратегиями игрока I устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Далее, к концам единичного отрезка проводятся две вертикальные прямые. На левой вертикальной прямой откладываются выигрыши игрока I, соответствующие первой его чистой стратегии (значения элементов первой строки платежной

матрицы A), а на правой вертикальной прямой – выигрыши, соответствующие второй стратегии (значения элементов второй строки матрицы A). Положительные значения элементов откладываются на прямых вверх, а отрицательные – вниз. Точки, соответствующие элементам одного столбца матрицы (стратегии игрока II) соединяются отрезками с указанием их номеров (номеров соответствующих столбцов).



Находим теперь нижнюю границу выигрышей игрока I в виде ломаной линии, огибающей **снизу** все эти отрезки. Эта граница показана на рисунке жирной линией.

Каждый отрезок соответствует некоторой стратегии игрока II. Прямая L_1 задается уравнением $v=12x-9$, $L_2: v=-8x+1$, $L_3: v=-2x+3$, $L_4: v=4-x$. Решение игры лежит на нижней огибающей в точке максимума. По рисунку видно, что цена игры расположена на пересечении прямых L_1 и L_2 , а стратегии B_3 и B_4 , соответствующие прямым L_3 и L_4 , являются пассивными, т.е. $q_3=q_4=0$.

Найдем точку пересечения прямых L_1 и L_2 как решение системы

$$\begin{cases} v = 12x - 9 \\ v = -8x + 1 \end{cases}$$

$$x=p_2=1/2, p_1=1-p_2=1/2, v=12*1/2-9=-3.$$

Найдем стратегии второго игрока. Уже известно, $q_3=q_4=0$. Применение активных стратегий дает цену игры, т.е. $-9q_1+q_2=-3$ или $-9q_1+(1-q_1)=-3 \Rightarrow q_1=2/5$ и $q_2=3/5$.

Итак, $X^*=\{1/2, 1/2\}$, $Y^*=\{2/5, 3/5, 0, 0\}$, $v=-3$.

Сведем нашу задачу к задаче линейного программирования:

1. Если платежная матрица содержит отрицательные элементы, увеличим их так, чтобы от них избавиться и построим вспомогательную игру. Тогда цена v' вспомогательной игры и цена v исходной игры удовлетворяют равенству $v' = v + a$.

$$\text{Исходная матрица } A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{вспомогательная } \begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 13 \\ 12 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}, v' = v + 9.$$

2. Введем новые переменные $x_1=q_1/v'$, $x_2=q_2/v'$, $x_3=q_3/v'$, $x_4=q_4/v'$, $z=1/v'$.

3. Задача линейного программирования

$$0x_1+10x_2+12x_3+13x_4 \leq 1$$

$$12x_1+2x_2+10x_3+12x_4 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max.$$

Задача записана в каноническом виде, поэтому сразу составляем симплекс-таблицу (учитываем, что $x_1=x_2=0$, т.к. $q_3=q_4=0$)

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	0	10	1
y_2	12	2	1
z	-1	-1	0

Все элементы правого столбца неотрицательны \Rightarrow решение допустимо, поэтому переходим ко второму этапу: построению оптимального плана.

Выбираем любой столбец с отрицательным элементом в последней строке, например, первый. Вычисляем неотрицательные

отношения элементов последнего столбца к выбранному, при этом нули можно делить только на положительные числа: $\min\{1/12\}$. Разрешающий столбец $-x_1$, разрешающая строка y_2 , разрешающий элемент $\alpha=12$.

Переходим к симплекс-преобразованиям:

- 1) Разрешающую строку делим на α ;
- 2) Разрешающий столбец делим на $(-\alpha)$;
- 3) Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника

$$\boxed{\text{новый элемент}} = \frac{\boxed{\text{старый элемент}} \times \boxed{\text{разрешающий элемент}} - \boxed{\text{элемент разрешающего столбца}} \times \boxed{\text{элемент разрешающей строки}}}{\boxed{\text{разрешающий элемент}}}$$

При симплекс-преобразованиях меняются местами разрешающий столбец и разрешающая строка.

	$-y_2$	$-x_2$	1
y_1	0	10	1
x_1	1/12	2/12	1/12
z	1/12	-10/12	1/12

Последняя строка содержит отрицательный элемент \Rightarrow план неоптимален. Вычисляем неотрицательные отношения элементов последнего столбца ко второму: $\min\{1/10, 1/2\}$.

Проводим симплекс-преобразования:

	$-y_2$	$-y_1$	1
x_2	0	1/10	1/10
x_1	1/12	-2/120	8/120
z	1/12	1/12	2/12

Все элементы последнего столбца и последней строки неотрицательны \Rightarrow получено оптимальное решение задачи линейного программирования.

$x_1=8/120$, $x_2=1/10$, $z=2/12$.

Возвращаемся к прежним переменным $v' = 1/z = 12/2 = 6$,
 $q_1 = x_1 \quad v' = (8/120) * 6 = 2/5$, $q_2 = x_2 \quad v' = (1/10) * 6 = 3/5$, $v = v' - 9 = 6 - 9 = -3$.

Ответ: $X^* = \{1/2, 1/2\}$, $Y^* = \{2/5, 3/5, 0, 0\}$, $v = -3$.

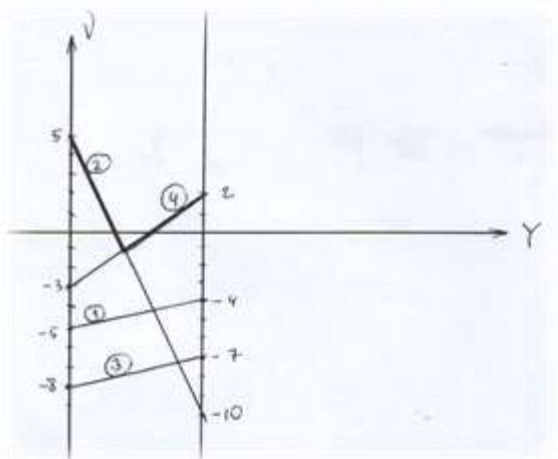
Пример 2. Найти решение матричной игры графическим и

линейно-программным способами $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & -10 \\ -8 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Графически решается задача игрока, имеющего две стратегии, т.е. в нашем случае задача игрока II. Оптимальная стратегия игрока I находится аналитическим путем после решения задачи игрока II.

Графические построения осуществляются следующим образом. На горизонтальной прямой берется отрезок единичной длины. Каждой точке этого отрезка сопоставляется смешанная стратегия $q = (q_1, q_2)$ игрока I по следующему правилу: q_1 – это расстояние от точки до правого конца отрезка, а q_2 – расстояние от точки до левого конца отрезка.

Далее, к концам единичного отрезка проводятся две вертикальные прямые. На левой вертикальной прямой откладываются выигрыши игрока II, соответствующие первой его чистой стратегии (значения элементов первой строки платежной матрицы A), а на правой вертикальной прямой – выигрыши, соответствующие второй стратегии (значения элементов второй строки матрицы A). Положительные значения элементов откладываются на прямых вверх, а отрицательные – вниз. Точки, соответствующие элементам одного столбца матрицы (стратегии игрока I) соединяются отрезками с указанием их номеров (номеров соответствующих столбцов).



Находим теперь верхнюю границу выигрышей игрока II в виде ломаной линии, огибающей **сверху** все эти отрезки. Эта граница показана на рисунке жирной линией.

Каждый отрезок соответствует некоторой стратегии игрока II. Прямая L_1 задается уравнением $v = y - 4$, L_2 : $v = -15y + 5$, L_3 : $v = y - 8$, L_4 : $v = 5y - 4$. Решение игры лежит на верхней огибающей в точке минимума. По рисунку видно, что цена игры расположена на пересечении прямых L_2 и L_4 , а стратегии A_1 и A_3 , соответствующие прямым L_1 и L_3 , являются пассивными, т.е. $p_1 = p_3 = 0$.

Точка пересечения прямых L_2 и L_4 – решение уравнения $5y - 3 = -15y + 5$, $y = q_2 = 2/5$, $q_1 = 1 - q_2 = 3/5$, $v = 5 \cdot 2/5 - 3 = -1$.

Найдем стратегии первого игрока. Уже известно, $p_1 = p_3 = 0$. Применение активных стратегий дает цену игры, т.е. $5p_2 - 3p_4 = -1$ или $5p_2 - 3(1 - p_2) = -1 \Rightarrow p_2 = 1/4$ и $p_4 = 3/4$.

Итак, $X^* = \{0, 1/4, 0, 3/4\}$, $Y^* = \{3/5, 2/5\}$, $v = -1$.

Сведем нашу задачу к задаче линейного программирования:

платежная матрица содержит отрицательные элементы, поэтому увеличим их так, чтобы от них избавиться и построим вспомогательную игру. Тогда цена v' вспомогательной игры и цена v исходной игры удовлетворяют равенству $v' = v + 10$.

Исходная матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & -10 \\ -8 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, вспомогательная $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

Новые переменные $x_1=q_1/v'$, $x_2=q_2/v'$, $z=1/v'$.

Задача линейного программирования

$$5x_1+6x_2 \leq 1$$

$$15x_1+0x_2 \leq 1$$

$$2x_1+3x_2 \leq 1$$

$$7x_1+12x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0/$$

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Решаем каноническую задачу, составляем симплекс-таблицу

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	5	6	1
y_2	15	0	1
y_3	2	3	1
y_4	7	12	1
z	-1	-1	0

Вычисляем неотрицательные отношения элементов последнего столбца к выбранному второму: $\min \{1/5, 1/3, 1/12\}$.

Разрешающий столбец $-x_2$, разрешающая строка y_4 , разрешающий элемент $\alpha=12$.

Выполняем симплекс-преобразования:

	$-x_1$	$-y_4$	1
y_1	18/12	-6/12	6/12
y_2	15	0	1
y_3	3/12	-3/12	9/12
x_2	7/12	1/12	1/12
z	-5/12	1/12	1/12

Вычисляем неотрицательные отношения элементов последнего столбца к первому: $\min \{6/18, 1/15, 9/3, 1/7\}$.

Разрешающий столбец $-x_1$, разрешающая строка y_2 , разрешающий элемент $\alpha=15$.

После симплекс-преобразований получаем таблицу

	$-y_2$	$-y_4$	1
y_1	-18/180	-6/12	72/180
x_1	1/15	0	1/15
y_3	-3/180	-3/12	132/180
x_2	-7/180	1/12	8/180
z	5/180	1/12	20/180

Все элементы последнего столбца и последней строки неотрицательны \Rightarrow получено оптимальное решение задачи линейного программирования.

$x_1=1/15$ $x_2=8/180$, $z=20/180$.

Возвращаемся к прежним переменным $v' = 1/z = 180/20 = 9$,
 $q_1 = x_1 v' = (1/15) \cdot 9 = 3/5$, $q_2 = x_2 v' = (8/180) \cdot 9 = 2/5$, $v = v' - 10 = 9 - 10 = -1$.

Ответ: $X^* = \{0, 1/4, 0, 3/4\}$, $Y^* = \{3/5, 2/5\}$, $v = -1$.

Пример 3. Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах $S=5-8$ единиц, расходы по хранению одной единицы товара составляют s руб., а расходы по завозу единицы товара k руб., цена за единицу товара составляет p руб. Составить платежную матрицу, элементами которой является прибыль магазина (доход от продажи с учетом расходов по хранению или по завозу). Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров, используя критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа, Гурвица при $\alpha = 0,2$ и $0,8$.
 $p=410$, $s=50$, $k=40$.

Решение.

Составим платежную матрицу игры в виде таблицы. Первый игрок – магазин, его выигрыши указываем в строках, второй игрок – покупатель, т.е. стихия.

	5	6	7	8
5	2050	2420	2790	3160

6	2000	2460	2830	3200
7	1950	2410	2870	3240
8	1900	2360	2820	3280

$a_{55}=5*410=2050$ (в магазин завезли 5 единиц товара, которые все раскупили);

$a_{56}=5*410+410-40=2420$ (завезли 5 единиц, потребовалось привезти одну и заплатить за доставку);

$a_{57}=5*410+2*(410-40)=2790$ (завезли 5 единиц, привезли и оплатили доставку двух единиц);

$a_{58}=5*410+3*(410-40)=3160$ (завезли 5 единиц, привезли и оплатили доставку трех единиц);

$a_{65}=5*410-50=2000$ (завезли 6 единиц, оплатили хранение непроданной одной единицы);

$a_{66}=6*410=2460$ (в магазин завезли 6 единиц товара, которые все раскупили);

$a_{67}=6*410+410-40=2830$ (завезли 6 единиц, потребовалось привезти одну и заплатить за доставку);

$a_{68}=6*410+2*(410-40)=3200$ (завезли 6 единиц, привезли и оплатили доставку двух единиц);

$a_{75}=5*410-2*50=1950$ (завезли 7 единиц, продали 5, оплатили хранение оставшихся двух);

$a_{76}=6*410-50=2410$ (завезли 7 единиц, продали 6, оплатили хранение оставшейся);

$a_{77}=7*410=2870$ (в магазин завезли 7 единиц товара, которые все раскупили);

$a_{78}=7*410+410-40=3240$ (завезли 7 единиц, потребовалось привезти одну и заплатить за доставку);

$a_{85}=5*410-3*50=1900$ (завезли 8 единиц, продали 5, оплатили хранение оставшихся трех);

$a_{86}=6*410-2*50=2360$ (завезли 8 единиц, продали 6, оплатили хранение оставшихся двух);

$a_{87}=7*410-50=2820$ (завезли 8 единиц, продали 7, оплатили хранение оставшейся);

$a_{88}=8*410=3280$ (в магазин завезли 8 единиц товара, которые все раскупили).

Для проверки критериев дополним таблицу столбцами **min** – минимальный элемент строки, **max** – максимальный элемент строки, **среднее** – среднее арифметическое элементов строки и строкой **max** – максимальный элемент столбца:

	5	6	7	8	min	max	среднее
5	2050	2420	2790	3160	2050	3160	2605
6	2000	2460	2830	3200	2000	3200	2622,5
7	1950	2410	2870	3240	1950	3240	2617,5
8	1900	2360	2820	3280	1900	3280	2590
max	2050	2460	2870	3280			

Максиминный критерий Вальда. При максиминном критерии Вальда оптимальной считается та стратегия лица, принимающего решение, которая обеспечивает ему максимум минимального выигрыша: $W=\max_i \min_j a_{ij}$.

В нашем случае $W=\max (2050, 2000, 1950, 1900) =2050$. Следовательно, по критерию Вальда лучше выбрать первую стратегию и завезти в магазин 5 единиц товара.

Риском r_{ij} игрока при использовании стратегии A_i в условиях P_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал P_j , и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i . Иначе, риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий). Выразим риск r_{ij} через элементы матрицы выигрышей a_{ij} . Очевидно, что если бы игрок заранее знал состояние «природы» P_j , он выбрал бы ту

стратегию, которой соответствует максимальной выигрыш в данном столбце (максимум столбца). Обозначим его $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Тогда, согласно определению, риск вычисляется по формуле $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$.

Построим матрицу рисков и дополним ее столбцом max – максимальный элемент строки.

	5	6	7	8	max
5	0	40	80	120	120
6	30	0	40	80	80
7	100	50	0	40	100
8	150	100	50	0	150

Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Данный критерий предполагает, что оптимальной стратегией является та стратегия, при которой величина риска в наихудшем случае минимальна. Этот критерий также называется критерием минимального риска. Согласно критерию Сэвиджа лицо, принимающее решение, пытается выбрать действие, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. $W = \min_i \max_j r_{ij}$.

У нас $W = \min (120, 80, 100, 150) = 80 \Rightarrow$ лучше выбрать вторую стратегию и завезти в магазин 6 единиц товара.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним оптимизмом, ни крайним пессимизмом. Критерий Гурвица рекомендует стратегию, которая определяется по формуле: $W = \max_i (\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij})$, где $\alpha \in [0; 1]$ – степень пессимизма.

Если $\alpha = 0,2$, то

$$0,2 \cdot 2050 + (1 - 0,2) \cdot 3160 = 2938$$

$$0,2 \cdot 2000 + 0,8 \cdot 3200 = 2960$$

$$0,2 \cdot 1950 + 0,8 \cdot 3240 = 2950$$

$$0,2 \cdot 1900 + 0,8 \cdot 3280 = 3004.$$

Тогда $W = \max(2938, 2960, 2950, 3004) = 3004$. Поэтому выбираем четвертую стратегию, т.е. завозим в магазин 8 единиц товара.

Если $\alpha = 0,8$, то

$$0,8 \cdot 2050 + (1 - 0,8) \cdot 3160 = 2272$$

$$0,8 \cdot 2000 + 0,2 \cdot 3200 = 2240$$

$$0,8 \cdot 1950 + 0,2 \cdot 3240 = 2208$$

$$0,8 \cdot 1900 + 0,2 \cdot 3280 = 2176.$$

Тогда $W = \max(2272, 2240, 2208, 2176) = 2272 \Rightarrow$ лучше выбрать первую стратегию и завезти в магазин 5 единиц товара.

Критерий Лапласа. При неизвестных вероятностях состояний «природы» можно принять, что все они равновероятны, т.е. $p(\Pi_j) = 1/n$, $j=1, \dots, n$, и выбор решения определяется критерием Лапласа, при котором ЛПР выбирает такую стратегию A_i , что $W = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$.

$W = \max(2605, 2622,5, 2617,5, 2590) = 2622,5 \Rightarrow$ лучше выбрать вторую стратегию и завезти в магазин 6 единиц товара.

Ответ: критерий Вальда рекомендует 5 единиц; критерий Сэвиджа 6 единиц, критерий Гурвица при $\alpha = 0,2$ – 8 единиц, критерий Гурвица при $\alpha = 0,8$ – 5 единиц, критерий Лапласа – 6 единиц.

5. Задания для практических занятий

Занятие 1. Составление модели игры. Решение игровых задач в «чистых» стратегиях. Принцип минимакса.

1. Пусть А и В одновременно показывают от одного до трех пальцев. Выигрыш или проигрыш определяется числом показанных пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то А получает от В платеж, равный этой сумме, если сумма пальцев нечетная, то А платит В. Определить оптимальные стратегии поведения сторон.
2. Коммерческое предприятие заключило договор на централизованную поставку овощей из теплиц на сумму 10 000 руб. ежедневно. Если в течение дня овощи не поступают, магазин имеет убытки в размере 20 000 руб. от невыполнения плана товарооборота. Магазин может осуществить самовывоз овощей фермера. Для этого он может сделать заказ в транспортном предприятии, что вызовет дополнительные расходы в размере 500 руб. Однако опыт показывает, что в половине случаев посланные машины возвращаются без овощей. Можно увеличить вероятность получения овощей от фермера до 80%, если предварительно посылать туда своего представителя, что требует дополнительных расходов в размере 400 руб. Существует возможность заказать дневную норму овощей у другого надежного поставщика – плодоовощной базы по повышенной на 50% цене. Однако в этом случае, кроме расходов на транспорт (500 руб.), возможны дополнительные издержки в размере 300 руб., связанные с трудностями реализации товара, если в тот же день поступит и централизованная поставка от фермера. Какой стратегии надлежит придерживаться магазину, если заранее неизвестно, поступит или не поступит централизованная поставка?

3. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 6 \\ 10 & 2 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

4. Определить наличие седловых точек в следующих матрицах, найти решение в играх с седловой точкой

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

5. Найти решение игры, определяемой матрицами $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, A_1 =один палец, B_2 = один палец или два, $\alpha = -3$, $\beta = 4$.

$$2. A = \begin{pmatrix} -10000 & -20000 \\ -10500 & -15500 \\ -10900 & -12900 \\ -25800 & -15500 \end{pmatrix}, \alpha = -12900, \beta = -12900, \text{ магазину}$$

послать к поставщику представителя и транспорт.

$$3. \text{ а) } \alpha = 2, \beta = 4, \text{ б) } \alpha = 2, \beta = 5$$

$$4. \text{ а) } \alpha = 1, \beta = 4, \text{ б) } \alpha = \beta = 2, \text{ в) } \alpha = \beta = 6$$

$$5.1 X^* = (1/3; 2/3), Y^* = (5/6; 1/6), v = 13/3; 5.2 X^* = (7/9; 2/9),$$

$$Y^* = (8/9; 1/9), v = 56/9; 5.3 X^* = (4/7; 3/7), Y^* = (6/7; 1/7), v = 18/7;$$

$$5.4 X^* = (2/7; 5/7), Y^* = (3/7; 4/7), v = 34/7; 5.5 X^* = (1/2; 1/2),$$

$$Y^* = (6/7; 1/7), v = 4$$

Занятие 2. Графический метод решения матричной игры.

1. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует 1000 костюмов и 2300 платьев, а при прохладной погоде - 1400 костюмов и 700 платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны 20, а платья - 5 рублям, цена реализации соответственно равна 40 рублей и 12 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.
2. Найти решение и цену игры, заданной следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти графически решение матричных игр

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -8 \\ -5 & 7 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответы: 1. } \begin{pmatrix} 36100 & 16900 \\ 16900 & 32900 \end{pmatrix}, X^* = \{5/11, 6/11\}, Y^* = \{5/11, 6/11\},$$

$$v = 281900/11; 1218 \text{ костюмов и } 1427 \text{ платьев 2. } X^* = \{3/4, 1/4\},$$

$$Y^* = \{1/2, 1/2\}, v = 17 3.1 X^* = \{6/11, 5/11\}, Y^* = \{0, 5/11, 0, 6/11\},$$

$$v = 25/11 3.2 X^* = \{7/15, 8/15\}, Y^* = \{7/15, 0, 0, 8/15\}, v = -19/15 3.3$$

$$X^*=\{0, 4/9, 5/9, 0\}, Y^*=\{4/9, 5/9\}, v=-7/9 \quad \mathbf{3.4} \quad X^*=\{3/4, 0, 1/4, 0\}, \\ Y^*=\{3/4, 1/4\}, v=-2$$

Занятие 3. Доминирование. Линейно-программный метод.

1. Выполните доминирование и найдите оптимальное решение и цену игры, заданной матрицей.

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1.1 $v=3$ **1.2** $X^*=\{2/3, 1/3, 0\}$, $Y^*=\{1/3, 2/3, 0, 0\}$, $v=10/3$ **1.3** $X^*=\{0, 0, 2/3, 1/3\}$, $Y^*=\{0, 1/3, 2/3, 0\}$, $v=7/3$

2. Дана матрица игры. Привести игру к задаче линейного программирования. Найти решение матричной игры в смешанных стратегиях

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 2.1 $v=8/9$, $X^*=\{5/9, 4/9\}$, $Y^*=\{7/9, 0, 2/9\}$ **2.2** $X^*=\{45/187, 25/187, 117/187\}$, $Y^*=\{0, 10/11, 0, 1/11\}$, $v=5/11$

Занятие 4. Игры с природой

1. Найти оптимальный вариант электростанции по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателями 0,8 и 0,3 и Сэвиджа по заданной таблице эффективности

Таблица эффективности

Варианты \ Среда	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄
A ₁	10	8	4	11
A ₂	9	9	5	10
A ₃	8	10	3	14
A ₄	7	7	8	12

Ответ: Вальд A₄, Сэвидж A₄, Гурвиц 0,8 A₄, Гурвиц 0,3 A₃, Лаплас A₃.

2. Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10% имеют

право бесплатного проезда. Цена билета 6 руб. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 руб. Оплата шофера за одну поездку - 60 руб. Сколько следует организовать рейсов?

Ответ: Вальд A_1 , Сэвидж A_4 , Гурвиц 0,9 A_1 , Гурвиц 0,1 A_6 , Лаплас A_2

3. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине колеблется от 1000 до 1500. Булочки покупаются лотками по 100 штук по цене 16 руб. и продаются по цене 22 руб. за штуку.

Непроданные булочки распродают по цене 8 руб. на следующее утро. Какое количество булочек следует закупать магазину?

Ответ: Вальд A_1 , Сэвидж A_4 , Гурвиц 0,9 A_1 , Гурвиц 0,1 A_6 , Лаплас A_3

6. Задания к зачету

Найти решение и цену игры, заданной следующей платежной матрицей:

1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	4. $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$	6. $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	8. $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$	10. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$	14. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	16. $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	18. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

7. Список основной литературы

1. Невежин, В. П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие / В.П. Невежин. - Москва: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. - 128 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-00091-563-9. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1840951>
2. Сигал, А. В. Теория игр и ее экономические приложения: учебное пособие / А.В. Сигал. - Москва: ИНФРА-М, 2022. - 418 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/textbook_5b4462825d3c38.99437329. - ISBN 978-5-16-017115-9. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1759767>

Теория игр и экономическое поведение: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Составитель Грунина Мария Викторовна

Подписано к печати “__” _____ 2021 г. Формат 84×108/32

Объем 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160