ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Линейная алгебра

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

09.03.03 *Прикладная информатика*
38.03.05 *Бизнес-информатика*

Новосибирск 2024

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор И.В. Ершов.

Линейная алгебра: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. Е.Ю.Тарсис. – Новосибирск, 2024. – 27 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки **09.03.03** *Прикладная информатика и* **38.03.05** *Бизнес-информатика*

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол № 8 от 23 апреля 2024 г.).

Содержание

1. Введение 4

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе………...5

3. Методические указания по выполнению контрольной работы...... 8

4. Задания для контрольной работы 12

5. Примеры решения задач контрольной работы 16

6. Вопросы к экзамену 25

7. Литература 26

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания линейной алгебры в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата линейной алгебры, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление,
– познакомить студентов с идеями и методами линейной алгебры,
– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев линейной алгебры.
– помочь студентам в овладении основными математическими понятиями, алгоритмами и методами,
– сформировать способность искать, критически анализировать и систематизировать информацию, применять системный подход для успешного решения поставленных прикладных задач.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия теории матриц и определителей;

– методы решения систем линейных алгебраических уравнений;

– основные понятия и инструменты векторной алгебры;

– основные понятия и методы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве;

– различные алгоритмы и методы линейной алгебры, которые предусмотрены программой курса и необходимы для формирования умения решать задачи профессиональной деятельности;

– основные понятия и инструменты линейной алгебры необходимые для критического мышления и системного подхода к решению поставленных задач;

Уметь:

– применять математический аппарат линейной алгебры для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть:

– навыками применения инструментария линейной алгебры для решения поставленных прикладных задач.

– навыками анализа и синтеза информации, системного подхода к решению задач профессиональной деятельности.

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы. Особенно это актуально для студента-заочника, самостоятельная работа которого над учебным материалом, является основной формой обучения. В помощь заочнику университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Однако студент-заочник должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

– проработки лекционного материала, доработки конспекта в результате изучения учебно-методической и научной литературы;

– подготовки к практическим занятиям;

– решения задач, выданных на практических занятиях;

– проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач.

2.1 Рекомендации к изучению материала по учебнику и ведению конспекта для студентов заочной и очной формы обучения

При изучении материала по учебнику из списка, приведенного на стр. 26, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, в том числе и те, которые по их простоте опущены, воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести такие примеры самостоятельно. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения обязательно должны использоваться в доказательстве. Полезно составлять схемы доказательств. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта не только приучит к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из небрежных, беспорядочных записей. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

2.2 Рекомендации к подготовке к практическим занятиям и решению задач

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Чтение учебника и конспекта должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный (если конечно такой путь не указан в условии задачи, в этом случае следует решить ее указанным методом). Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от остальных. Ошибочные записи следует замазывать корректором или просто зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом, циркулем и указывать масштаб. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

2.3 Рекомендации к проведению самоконтроля (самопроверки)

После изучения определенной темы по конспекту и (или) учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику или конспекту. Вопросы и задачи для самопроверки, приведенные в данном пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механически заученных форм, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

3. Методические указания по выполнению контрольной работы

Главная цель выполнения контрольной работы (КР) – оказать студенту помощь в его работе. Рецензия на эту работу позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной). Прежде, чем выполнять КР нужно изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и (или) учебнику, ответить на вопросы для самоконтроля. Этот материал нужно закрепить, решая самостоятельно (может быть и несколько раз) уже решенные типовые задачи, приведенных в соответствующих разделах в учебнике, выбранном из списка основной и дополнительной литературы; Не следует приступать к выполнению задачи из контрольной до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену.

Студенты выполняют в 1-м семестре контрольную работу (стр.11-15) по следующим разделам:

Элементы матричной алгебры – задачи 1-10;

Системы линейных алгебраических уравнений – задачи 11-20, 21-30;

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии – задачи 31-40, 41-50;

Таким образом, студент должен выполнить в рамках КР **5 задач**.

При оформлении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1) Контрольная работа выполняется в отдельной ученической тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны название учебного заведения, факультета; название кафедры; название КР; название дисциплины; название специальности; ФИО и личный шифр студента; номер курса и группы.

2) Задачи контрольной работы следует располагать в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением каждой задачи надо записать ее номер и полностью переписать ее условие.

3) Решение задачи должно быть изложено последовательно с краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как получаются те или иные результаты) соответствующими ссылка-

ми на вопросы теории и указанием необходимых формул, теорем); в конце необходимо привести окончательный ответ.

4) Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5) При решении задач надо учесть указания (если они есть), приведенные после формулировки условия задачи.

6) На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной около 3 см для замечаний преподавателя.

7) Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

8) Студентам заочной формы обучения следует зарегистрировать выполненную контрольную работу в установленные сроки в деканате у методиста.

9) Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

10) Зачтенную контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю зачтенной контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

11) Из приведенных в таблице 1 на стр.11, студент выполняет ***тот вариант КР, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра***.

Таблица 1

№ вари-анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

4. Задания для контрольной работы

В задачах **1-10** найти $P(A)$.

1. $P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $P(A) = A^2 - 3A^{-1} + 2|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $P(A) = A^2 - 4A^{-1} + 5|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $P(A) = A^2 + 5A^{-1} - 2|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

5. $P(A) = A^2 - 6A^{-1} + |A|E, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $P(A) = A^2 + 2A^{-1} - 8|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

7. $P(A) = A^2 - 7A^{-1} - 2|A|E, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $P(A) = A^2 + 4A^{-1} - 5|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

10. $P(A) = A^2 - 5A^{-1} + 2|A|E, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

В задачах **11-20** решить систему уравнений методом Крамера.

11. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} -x + 4y = 5 \\ x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ -x+2z=2 \\ -2x+2y-3z=-5 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 4x-y+2z=8 \\ -x+2y=-7 \\ x-3y-5z=2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x-2y+2z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ x+y+5z=3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x+2y-4z=-8 \\ 3x-y=4 \\ -5x+6y-2z=-13 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} 3x-y+2z=12 \\ 2x+y-3z=7 \\ x-z=3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-4y-5z=5 \\ 3x-y-5z=3 \\ 6x+2y=-8 \end{cases}$

В задачах **21–30** решить систему уравнений методом Гаусса.

21. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=5 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-x_4=1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=6, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ -x_1-2x_2+2x_3-x_4=-4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-4x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4=7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=12 \\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=14 \\ 5x_1-x_2+x_3-4x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=13 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-7, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=4, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=9. \end{cases}$

В задачах **31-35** в пространстве $\mathbb{R}^3$ (декартова прямоугольная система координат) заданы две точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, вектор $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ у которого одна из компонент неизвестна. Найти: а) модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; б) неизвестную компоненту вектора $\vec{a}$, если известно, что он перпендикулярен (ортогонален) вектору $\overrightarrow{AB}$.

31. $A(1;2;3), B(-2;5;6), \vec{a}=2\vec{i}+a_y\vec{j}+\vec{k}.$

32. $A(1;-2;3), B(2;2;1), \vec{a}=a_x\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}.$

33. $A(0;-3;-3), B(2;1;1), \vec{a}=-3\vec{j}+a_z\vec{k}.$

34. $A(7;-5;2), B(4;0;2), \vec{a}=-10\vec{i}+a_y\vec{j}-\vec{k}.$

35. $A(-2;0;3), B(1;4;2), \vec{a}=a_x\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}.$

В задачах **36-40** в пространстве $\mathbb{R}^3$ (декартова прямоугольная система координат) заданы две точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$ и вектор $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ с неизвестными компонентами. Требуется найти: а) модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; б) компоненты вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, если известно, что он коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{a}\,||\,\overrightarrow{AB}$) и их скалярное произведение известно ($\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=$заданное число).

36. $A(-2;0;5), B(2;1;7), \vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=42.$

37. $A(2;0;0), B(1;4;2), \vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=-21.$

38. $A(3;1;4), B(0;4;-1), \vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=86.$

39. $A(2;1;7), B(5;0;2), \vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=-70.$

40. $A(1;-2;1), B(1;4;2), \vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=74.$

В задачах **41-50** даны координаты вершин треугольника ABC. Сделать чертеж и составить: уравнения прямых, на которых расположены стороны треугольника и высота CD; уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

Указание. На чертеже изобразить треугольник по заданным координатам его вершин и соответствующие прямые.

41. $A(-6; -3)$; $B(-4; 3)$; $C(9;2)$

42. $A(-10; 5)$; $B(6; -7)$; $C(-1; 17)$

43. $A(10; -4)$; $B(-6; 8)$; $C(1; -16)$

44. $A(3; 2)$; $B(-13; -10)$; $C(-6; 14)$

45. $A(7; 4)$; $B(-9; -8)$; $C(-2; 16)$

46. $A(7; 3)$; $B(-9; -9)$; $C(-2; 15)$

47. $A(-13; 3)$; $B(3; -9)$; $C(-4; 15)$

48. $A(12; -2)$; $B(-4; -14)$; $C(3; 10)$

49. $A(7; 5)$; $B(-9; -7)$; $C(-2; 17)$

50. $A(13; 7)$; $B(-3; -5)$; $C(4; 19)$

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти $P(A)$.

$$P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 4 & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 4 & 4\cdot(-2) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу ищем по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

$|A| = 1\cdot 3 - (-2)\cdot 4 = 11,\qquad A_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3,\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|4| = -4,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|-2| = 2,\ \ A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} + 3\cdot 11\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{280}{11} & -\frac{92}{11} \\ \frac{184}{11} & \frac{372}{11} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $P(A)=\begin{pmatrix} \dfrac{280}{11} & -\dfrac{92}{11} \\ \dfrac{184}{11} & \dfrac{372}{11} \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=-5 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Запишем систему в матричной форме $\left\| A\cdot X = B \right\| = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы системы $\Delta=\det A=\det\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (главный определитель системы):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\left\| \begin{matrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{matrix} \right\| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=5(-1)^2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+8(-1)^3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+1(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \right\| = 5(2-6)-8(-3-12)+1(3+4)=107\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители. Вспомогательный определитель Δ_1 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -7 & -2 & 6 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{matrix} \right\| = 2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+8(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 8(7+30) + 1(-7-10) =$$

$$= -321.$$

Определитель Δ_2 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{matrix} \right\| = 5(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5(7+30) - 2(-3-12) + 1(-15+14) = 214.$$

Определитель Δ_3 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{matrix} \right\| = 5\left(-1\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+8\left(-1\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\left(-1\right)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(10+7) - 8(-15+14) + 2(3+4) = 107.$$

Тогда получим решение по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-321}{107} = -3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{214}{107} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{107}{107} = 1.$$

Выполним проверку правильности полученного решения. Для этого подставим найденные значения неизвестных в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} 5\cdot(-3) + 8\cdot 2 + 1 = 2, \quad 2 = 2 \\ 3\cdot(-3) - 2\cdot 2 + 6\cdot 1 = -7, \quad -7 = -7 \\ 2\cdot(-3) + 2 - 1 = -5 \quad -5 = -5 \end{cases}.$$

Так как каждое уравнение системы в результате подстановки обратилось в верное равенство, делаем вывод, что решение получено правильно.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 19, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 2 & -4 & 19 \\ 5 & -2 & 0 & -8 & 16 \\ 5 & 2 & -1 & -26 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} (-6)(-5)(-5) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 2 & -6 & -36 & -46 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ :2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 1 & -3 & -18 & -23 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (2)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & 0 & -13 & -50 & -99 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ (13)(4)(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 57 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ :(-76) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ (2)(24)(-4) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 21/2 \end{array}\right).$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = \dfrac{21}{2}, \\ x_4 = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; -5; \dfrac{21}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Пример 4. ***(к задачам 31-35).***

Пусть $A(-3;2;-1), B(-2;5;6), \vec{a} = 3\vec{i} + a_y\vec{j} + \vec{k}$. Требуется найти: а) модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; б) неизвестную компоненту вектора $\vec{a}$, если известно, что он перпендикулярен (ортогонален) вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Найдем компоненты вектора $\overrightarrow{AB}$. Для этого из координат его конца (т.B) вычтем соответствующие координаты его начала (т.A): $\overrightarrow{AB}\left(-2-(-3); 5-2; 6-(-1)\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(1;3;7\right)$. а) Модуль вектора заданного в ортонормированном базисе вычисляется как «корень квадратный из суммы квадратов его координат»: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+3^2+7^2} = \sqrt{59}$. б) Так как $\vec{a} = 3\vec{i} + a_y\vec{j} + \vec{k}$ по условию задачи перпендикулярен (ортогонален) вектору $\overrightarrow{AB}$ $(\vec{a} \perp \overrightarrow{AB})$, то по критерию ортогональности двух ненулевых векторов их скалярное произведение равно нулю $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, если известны компоненты векторов сомножителей вычисляется по формуле «строка координат вектора $\vec{a}$ на столбец координат вектора $\overrightarrow{AB}$»:

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 & a_y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 + a_y \cdot 3 + 1\cdot 7 = 10 + 3a_y.$$

Приравняем полученное выражение для скалярного произведения нулю:

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 + 3a_y = 0 \Rightarrow a_y = -\frac{10}{3}.$$

Ответ: а) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{59}$; б) $a_y = -\frac{10}{3}$.

Пример 5 ***(к задачам 36-40).***

Пусть $A(-3;2;-1), B(-2;5;6), \vec{a} \parallel \overrightarrow{AB}$ и $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = -59$. Требуется найти: а) модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; б) компоненты вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Решение. Найдем компонеты вектора $\overrightarrow{AB}$. Для этого из координат его конца (т.В) вычтем соответствующие координаты его начала (т.А): $\overrightarrow{AB}\left(-2-(-3);5-2;6-(-1)\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\left(1;3;7\right)$. а) Модуль вектора заданного в ортонормированном базисе вычисляется как «корень квадратный из суммы квадратов его координат»: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+3^2+7^2}=\sqrt{59}$. б) ***1-ый способ:*** Так как $\vec{a}\,||\,\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\left(1;3;7\right)=\left(\lambda;3\lambda;7\lambda\right)$. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, если известны компоненты векторов сомножителей вычисляется по формуле «строка координат вектора $\vec{a}$ на столбнец координат вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}\lambda & 3\lambda & 7\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}=\lambda\cdot1+3\lambda\cdot3+7\lambda\cdot7=59\lambda..$$

Приравняем полученное выражение для скалярного произведения заданному в условии значению -59: $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=59\lambda=-59\Rightarrow\lambda=-1$. Следовательно компоненты вектора $\vec{a}$ равны $a_x=\lambda=-1; a_y=3\lambda=-3; a_z=7\lambda=-7$. ***2-ой способ:*** Так как $\vec{a}\,||\,\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{AB}$. Подставим в $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=-59$:

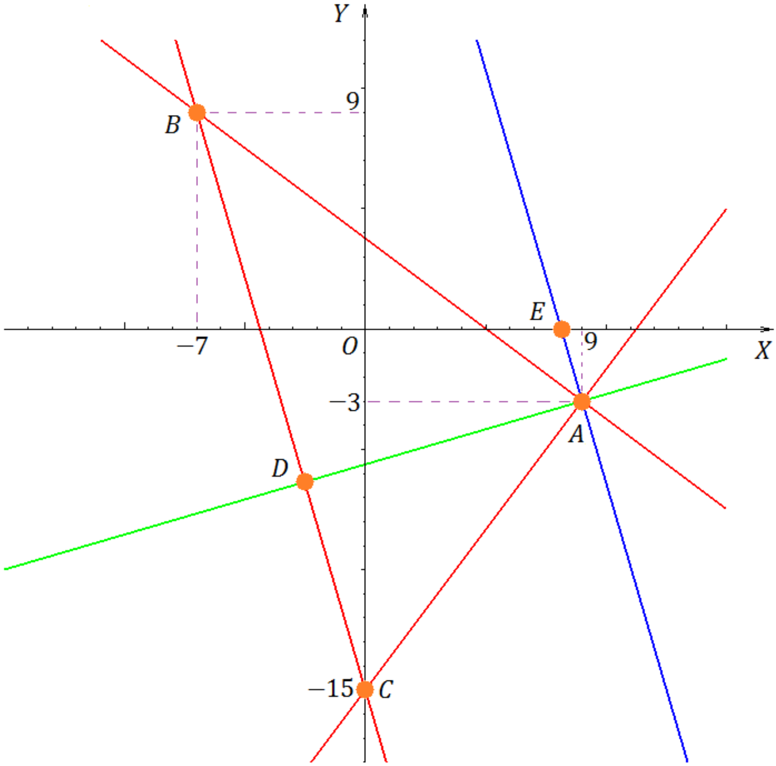
$$\left(\lambda\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}^2=\lambda\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\lambda\left(\sqrt{59}\right)^2=59\lambda=-59\Rightarrow\lambda=-1.$$

Т.к. $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{AB}$, то $a_x=\lambda\cdot1=-1; a_y=\lambda\cdot3=-3; a_z=\lambda\cdot7=-7$.

Ответ: а) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{59}$; б) $a_x=-1; a_y=-3; a_z=-7$.

Пример 6. Даны координаты вершин треугольника АВС*:*
А (9; –3); В (–7;9); С (0; –15). Сделать чертёж. Составить уравнение прямой, на которой расположена сторона АВ треугольника. Составить уравнение прямой, на которой расположена высота треугольника, опущенная из вершины А на сторону ВС. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС.

Решение.



Для составления уравнения прямой, на которой расположена сторона AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2): $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Тогда AB: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow$ $\dfrac{x-9}{-7-9} = \dfrac{y-(-3)}{9-(-3)} \Rightarrow \dfrac{x-9}{-16} = \dfrac{y+3}{12}$ или $3x + 4y - 15 = 0$. Аналогично составляются уравнения прямых, на которых расположены стороны BC и CA.

Для составления уравнения прямой, на которой расположена высота треугольника, опущенная из вершины A на сторону BC (прямая AD) будем использовать уравнение прямой, которая проходит через заданную точку (опорную) (x_0, y_0) перпендикулярно вектору

$\vec{n}=\{n_x, n_y\}$: $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0$. Так как высота опущена на сторону BC, то $\vec{n} \parallel \overrightarrow{BC}(x_C-x_B, y_C-y_B)$. $\overrightarrow{BC}(0-(-7);-15-9) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(7;-24) \Rightarrow \vec{n}(7;-24)$. Таким образом уравнение прямой AD: $7(x-9)-24(y-(-3))=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 7x-63-24y-72=0 \Rightarrow 7x-24y-135=0$.

Для составления уравнения прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне CD (прямая AE) воспользуемся уравнением прямой проходящей через опорную точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\vec{s}(s_x;s_y)$: $\dfrac{x-x_0}{s_x}=\dfrac{y-y_0}{s_y}$. Так как прямая проходит параллельно стороне BC, то $\vec{s}=\overrightarrow{BC}=(-7;24)$ и

$$AE: \frac{x-9}{-7}=\frac{y-(-3)}{24} \Rightarrow 24(x-9)=-7(y+3) \Rightarrow 24x+7y-195=0.$$

Ответ: AB: $3x+4y-15=0$; AD: $7x-24y-135=0$;
AE: $24x+7y-195=0$.

6. Вопросы к экзамену

1. Система линейных алгебраических уравнений. Основные понятия и определения. Метод Гаусса
2. Определители второго и третьего порядка. Разложение определителя по строке и столбцу.
3. Свойства определителей.
4. Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера.
5. Операции над матрицами.
6. Решение квадратных систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Фундаментальная система решений однородной системы.
9. Линейное пространство. Линейная зависимость. Базис и размерность линейного пространства. Арифметическое линейное пространство.
10. Геометрический векторы и их свойства. Линейные операции над векторами.
11. Геометрический смысл линейной зависимости векторов. Базис системы векторов на плоскости и в пространстве. Координаты вектора.
12. Аффинные системы координат на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат.
13. Скалярное произведения векторов и его свойства.
14. Расстояние между двумя точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
15. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположения двух прямых. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

7. Литература

6.1 Список основной литературы

1. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учебное пособие / Г. С. Шевцов. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Магистр: ИНФРА-М, 2023. — 544 с. - ISBN 978-5-9776-0258-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1910872
2. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 472 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1933160
3. Рудык, Б. М. Линейная алгебра: учебное пособие / Б. М. Рудык. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 318 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004533-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2045820

6.2 Список дополнительной литературы

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. - 12-е изд., испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-0979-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1913526.
2. Малугин В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 478 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02976-5.

Линейная алгебра: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Составители: Тарсис Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160